Criterio di Monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b), si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Nota: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente decrescente in } (a, b)$$

MA non valgono le implicazioni inverse!! Basta considerare la funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Criterio di Monotonia

Esempi. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

  Quindi, f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è crescente in $(0, +\infty)$.

- $g(x) = (x^2 - 3)e^x$

  Si ha che: $g'(x) = (x^2+2x-3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$.

  Quindi, g è decrescente in $(-3, 1)$ ed è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(1, +\infty)$.

Criterio di Monotonia

Attenzione: quando si applica il criterio di monotonia, bisogna sempre tenere presente il campo di esistenza della funzione in considerazione.

Esempio. Studiare la monotonia della funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0.$$

È sbagliato dire che f è strettamente decrescente in $\mathbb{R}$ perché f non è definita in tutto $\mathbb{R}$ (infatti, è definita solo per $x \neq 0$).

È sbagliato anche dire che f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$. Infatti, il criterio di monotonia vale solo sugli intervalli.

Ciò che si può dire è che f è strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e nell'intervallo $(0, +\infty)$.

Esercizio

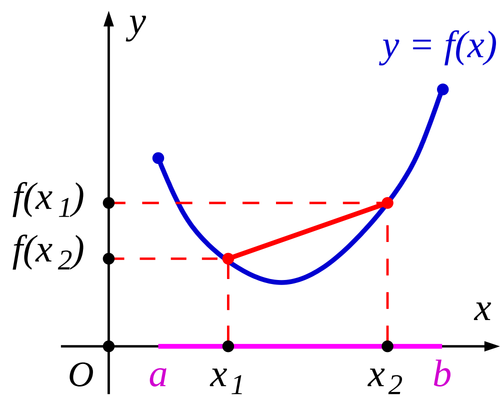
Studiare la monotonia delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 1}$$

$$g(x) = \ln(x^2 - 2x)$$

$$h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Funzioni Concave e Convesse



Una funzione f è convessa in (a,b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico.

Una funzione f è concava in (a,b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,b)$ e per ogni $\lambda \in [0,1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico.

Criterio di Convessità

Criterio di convessità. Se f è una funzione derivabile due volte in (a,b), si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ convessa in } (a,b)$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ concava in } (a,b)$$

Esempi. Determinare la convessità delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f''(x) = 2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, f è convessa in $\mathbb{R}$.

- $g(x) = e^{-x^2}$

  Si ha che: $g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  Quindi, g è concava in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ed è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Punti di Massimo e Minimo Relativo

Punti di massimo e minimo relativo. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.
x_0 si dice *punto di massimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 si dice *punto di minimo relativo* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo relativo. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è *derivabile* in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo relativi interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Criterio della derivata seconda. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo (a, b) e sia x_0 un *punto critico*.

- Se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo.

Esercizio

Studiare le seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

determinandone campo di esistenza, comportamento agli estremi, monotonia, eventuali punti di massimo e minimo, convessità, e tracciarne un grafico qualitativo.

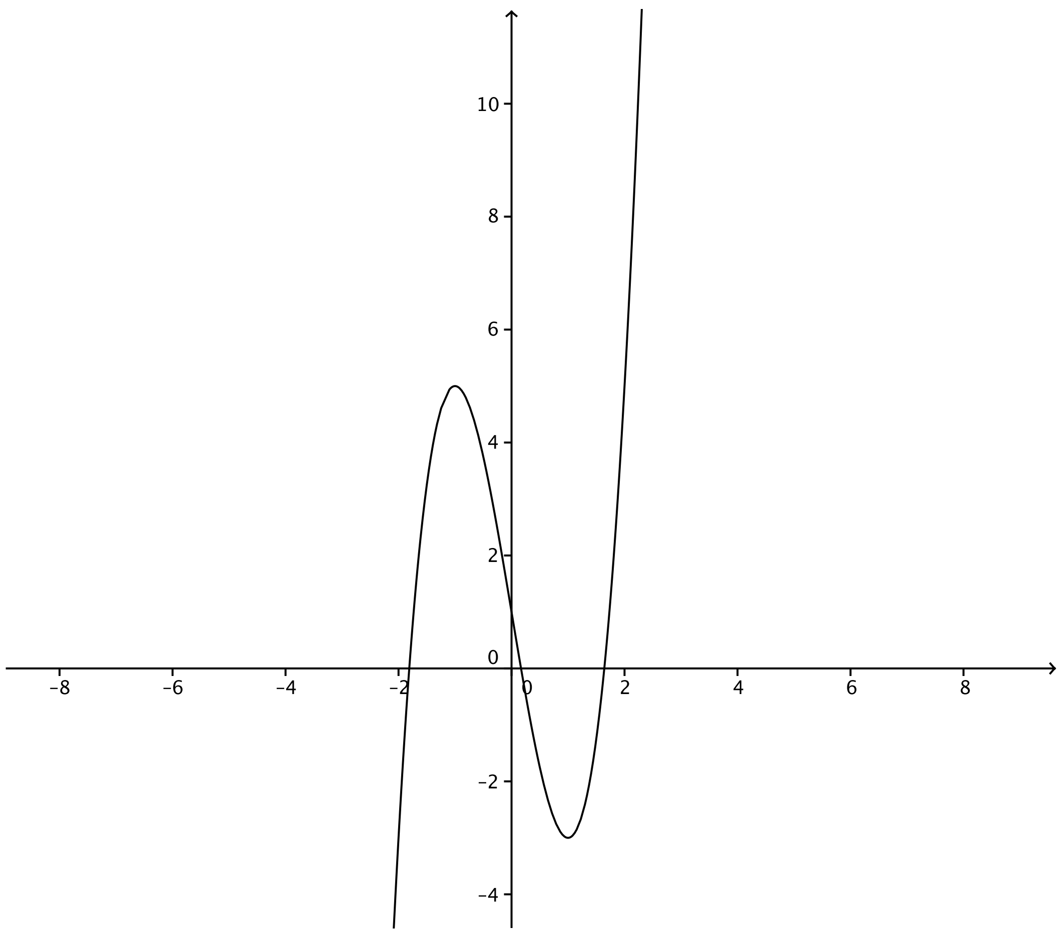
Esercizi

Soluzione (a): $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = 6x^2 - 6$
  f è strettamente crescente in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
  f è strettamente decrescente in $(-1, 1)$
  $x = -1$ e $x = 1$ sono punti critici di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
  $x = -1$ è un punto di massimo relativo, in cui f vale $f(-1) = 5$
  $x = 1$ è un punto di minimo relativo, in cui f vale $f(1) = -3$
- convessità: $f''(x) = 12x$
  f è convessa in $(0, +\infty)$; f è concava in $(-\infty, 0)$;
  $x = 0$ è un punto di flesso di f

Esercizi

- grafico:



Esercizi

Soluzione (b): $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

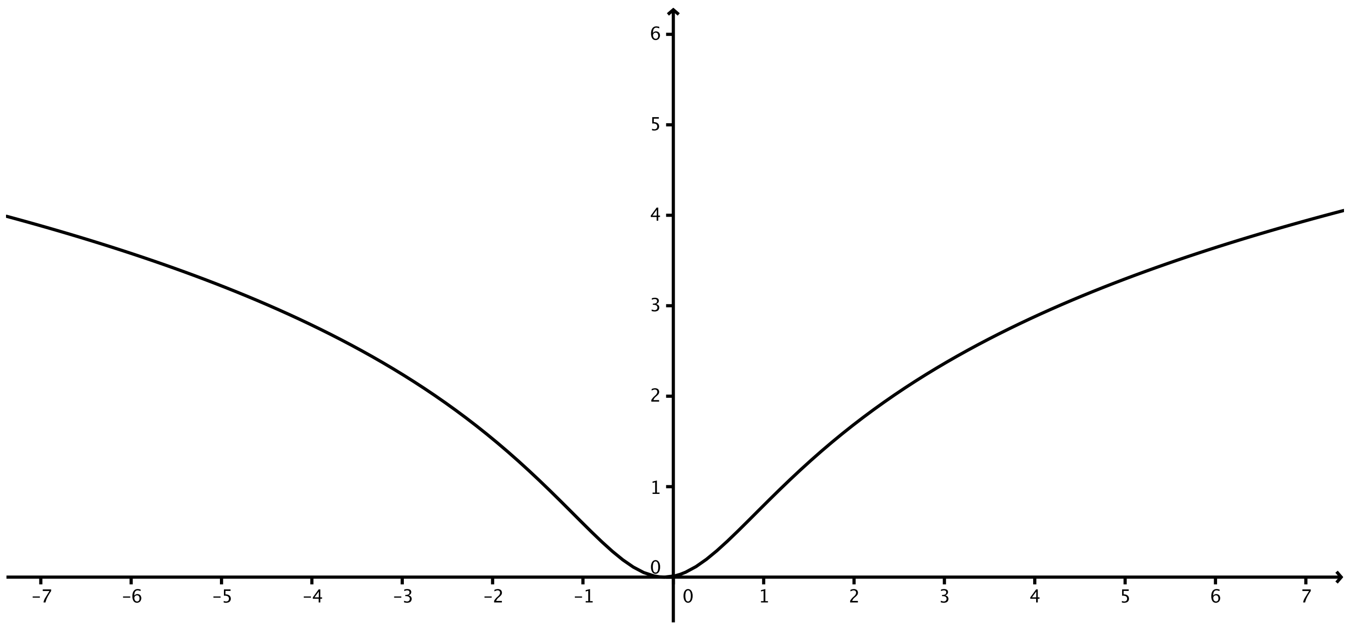
- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$

  f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$
  f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
  $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
  $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, in cui f vale $f(0) = 0$
- convessità: $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$

  f è convessa in $(-1, 1)$, f è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
  $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di flesso

Esercizi

- grafico:



Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

Problema: determinare massimo e minimo assoluti di una funzione assegnata f su un intervallo dato $[a, b]$.

1. Stabilire se la funzione è continua. Se lo è, essa ha certamente massimo e minimo assoluti in $[a, b]$ (per il Teorema di Weierstrass).
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
   - gli estremi dell'intervallo: a, b;
   - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
   - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Massimi e Minimi Assoluti di una Funzione su $[a, b]$

4. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

5. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.
6. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Analogamente per i punti di minimo e il valore minimo.

Esercizi

Esercizio 1. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$$

nell'intervallo $[0, 2]$.

Esercizio 2. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = \frac{2 - 2x}{x^2 + 3}$$

nell'intervallo $[-3, 0]$.

Esercizi

Esercizio 3. (compito d'esame del 26/02/2013)
Si consideri la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-2+k} & \text{se } -1 \le x \le 1, \\ x^2 + 2 & \text{se } 1 < x \le 3. \end{cases}$$

- Determinare per quale valore di k la funzione f è continua nel punto $x = 1$.
- Per tale valore di k la funzione f è derivabile nel punto $x = 1$?
- Per il valore di k per cui la funzione è continua, trovare i punti di massimo e minimo assoluti di f sul suo dominio di definizione, specificandone l'ascissa e l'ordinata.

Regola di de l'Hôpital

Teorema di de l'Hôpital. Siano f, g due funzioni derivabili nell'intervallo aperto (a, b), escluso al più il punto x_0, tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

e $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0. Se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazione: il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per $x \to \pm\infty$ e per le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$.

Regola di de l'Hôpital – Esempi

1) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$$

2) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{5x^5} = 0$$

3) $$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$$

Osservazione: la regola di de l'Hôpital non sempre è risolutiva. Ad esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \ldots$$

In questo caso basta osservare che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1.$$

Esercizi

Esercizio 1. Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione;

(c) disegnare un grafico qualitativo di f, di g, di $f \circ g$ e di $g \circ f$.