Campo di Esistenza

Il campo di esistenza di una funzione f è il dominio più grande su cui ha significato la legge f.

ESERCIZIO 1. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = 9 + 2x$.

Soluzione: $\mathbb{R}$

ESERCIZIO 2. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{-x}$.

Soluzione: affinché le due radici abbiano significato, i radicandi devono essere entrambi non negativi: $x - 2 \geq 0$ e $-x \geq 0$, cioè $x \geq 2$ e $x \leq 0$.
Segue che la funzione non è definita per alcun valore di x.

Campo di Esistenza

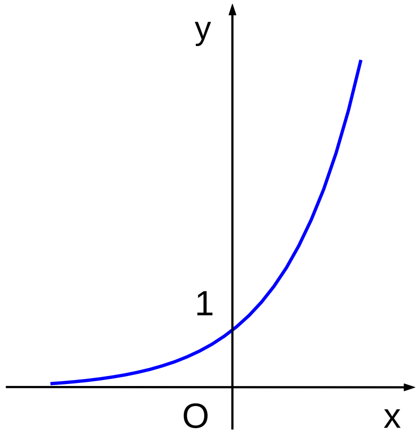
ESERCIZIO 3. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-4}$.

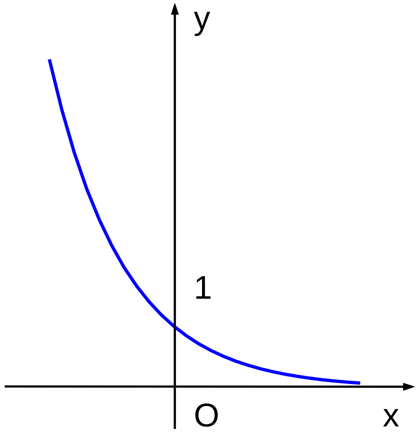
Soluzione: il denominatore deve essere diverso da zero, cioè $x \neq 2$ e $x \neq -2$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $9 - x^2 \geq 0$ e quindi $-3 \leq x \leq 3$. Dunque il campo di esistenza è $[-3,-2) \cup (-2,2) \cup (2,3]$.

ESERCIZIO 4. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-1}{x+3}}$.

Soluzione: l'unica condizione da imporre è che il denominatore sia diverso da 0. Quindi il campo di esistenza è $\mathbb{R} - \{-3\}$.

Funzione Esponenziale





$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $a > 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente crescente:*
  $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0

$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente decrescente*:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

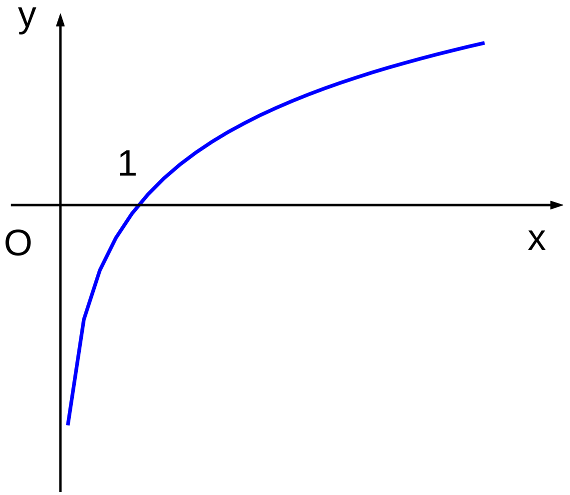
$a^x a^y = a^{x+y}$ (prodotto), $(a^x)^y = a^{xy}$ (composizione), $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ (reciproco).

Funzione Logaritmo

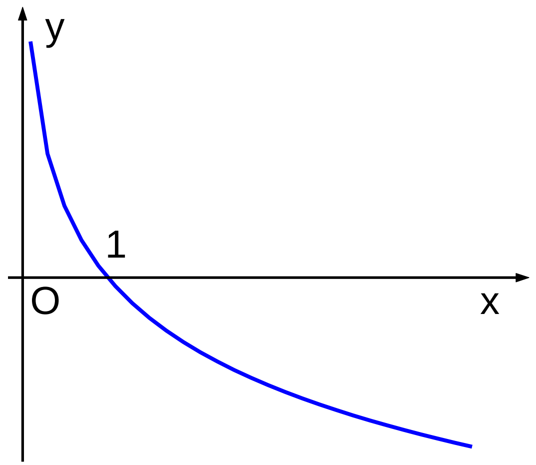
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e surgettiva, quindi invertibile.

$$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \;\; f^{-1}(x) = \log_a x \qquad \text{logaritmo in base } a \text{ di } x$$

$$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$



$y = \log_a x$ con $a > 1$



$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

Proprietà del Logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x.

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\dfrac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- cambio di base: $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Esercizi

1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0,30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0,43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 8$, $\log_{10} 5$, $\log_e 2$, $\log_e \frac{1}{2}$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2,$$

$$\log_e 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}, \qquad \log_e \frac{1}{2} = \log_e 2^{-1} = -\log_e 2.$$

2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha\, e^{\beta\, x}$ passi per i punti $(0,5)$ e $(4,15)$.

Soluzione: poiché $f(0) = \alpha$, si ha immediatamente che $\alpha = 5$. Si ottiene quindi che $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$, da cui $e^{4\beta} = 3$, cioè $\beta = \frac{1}{4} \log_e 3$.

Esercizi

3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui risulta $\log(2x+3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x + 3 > 0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log(2x + 3) < 1$ è equivalente a $2x + 3 < 10$.

Pertanto, l'insieme cercato è $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6).$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 6 > 0$, quindi il campo di esistenza è $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$.

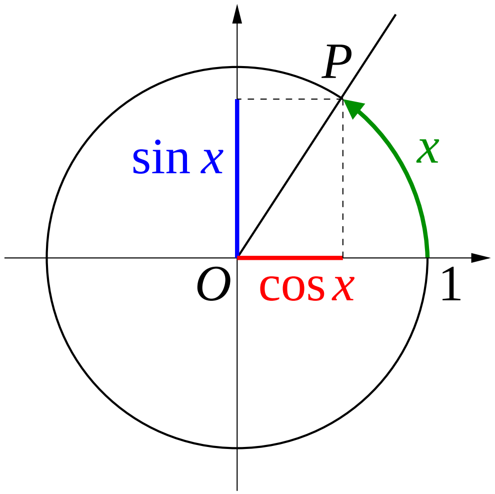
La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

6. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Soluzione: l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $e^x - 1 \geq 0$ e quindi $x \geq 0$. Il campo di esistenza è $[0, +\infty)$.

Funzioni Seno e Coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato $x \in \mathbb{R}$ si costruisce il punto P partendo da $(1,0)$ e percorrendo un arco di lunghezza $|x|$

- in senso *antiorario* se $x > 0$
- in senso *orario* se $x < 0$

Per definizione $P = (\cos x, \sin x)$.

Relazione fondamentale:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di $\sin x$:

- periodica:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$
  $\sin x < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari: $\sin(-x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:
  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$
  $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

Funzioni Seno e Coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per $y = \sin x$.

Il grafico $y = \cos x$ si ottiene per traslazione poiché si ha

$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$