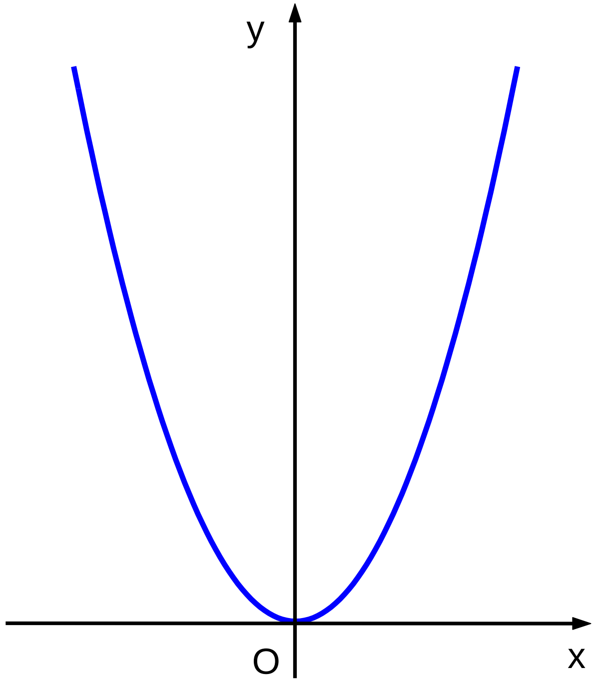
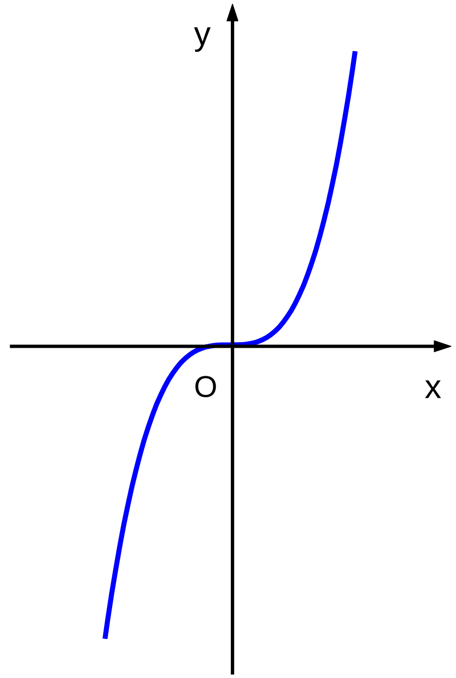
Potenze con Esponente Intero Positivo



$y = f(x) = x^2$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione pari



$y = g(x) = x^3$

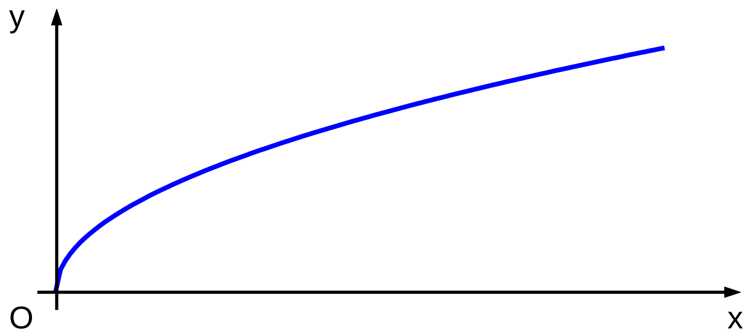
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione dispari

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è *pari* o a quello di x^3 se n è *dispari*.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'*identità*, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON è invertibile, ma lo è da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$. Chiamiamo *radice quadrata* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

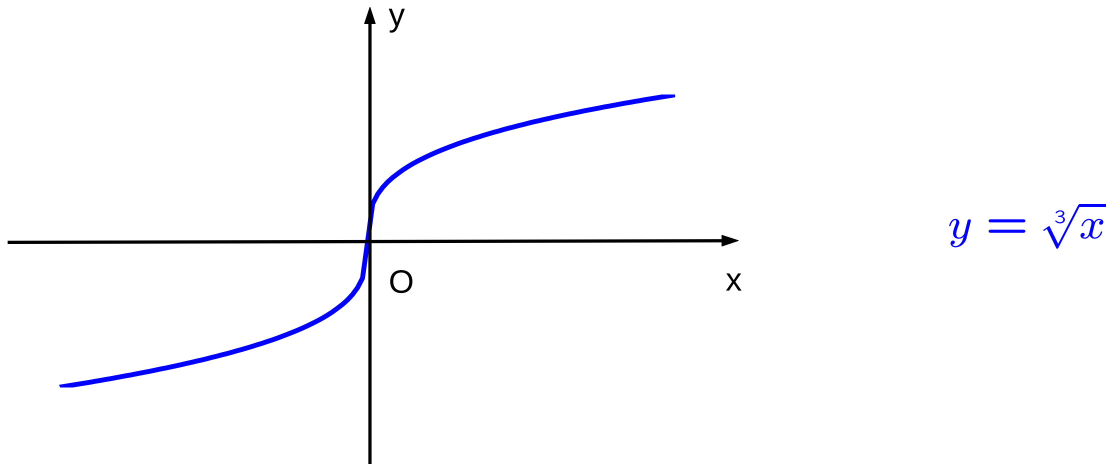


$y = \sqrt{x}$

In generale, se n è *pari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$.
Chiamiamo l'inversa *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è *invertibile*.
  Chiamiamo *radice cubica* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.



In generale, se n è *dispari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Chiamiamo *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni Potenza

POTENZE AD ESPONENTE INTERO:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

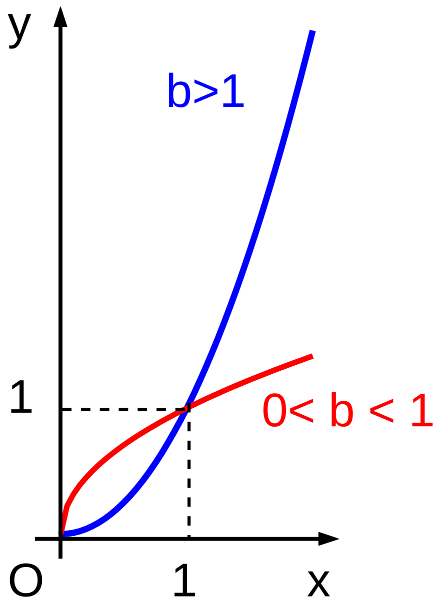
POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{definita per ogni } x > 0.$$

POTENZE AD ESPONENTE REALE: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

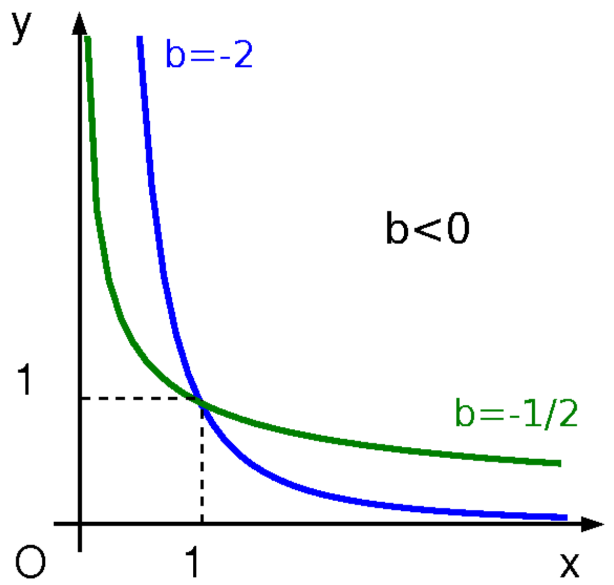
$f(x) = x^b$ definita per ogni $x > 0$ (resta indefinito 0^0 !!!)

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b > 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$



$$y = f(x) = x^b \quad \text{per } b < 0$$

$$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$$

Ancora sulle Potenze

POLINOMI: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n.

FUNZIONI RAZIONALI: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le *funzioni razionali*, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : \; Q(x) \neq 0\}.$$

Come caso particolare ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$