Sottoinsiemi di Numeri Reali

INTERVALLI LIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- intervallo chiuso $\quad [a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$
- intervallo aperto $\quad (a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$
- intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra $\quad [a, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$
- intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra $\quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$

INTERVALLI ILLIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq a\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x > a\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : \ x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq 0\}$

INTORNI $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$

- si dice *intorno del punto* x_0 *di raggio* δ l'insieme:

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} : \ x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = I_\delta(x_0)$$

Funzioni

Il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze. Tale corrispondenza può essere data in svariati modi:

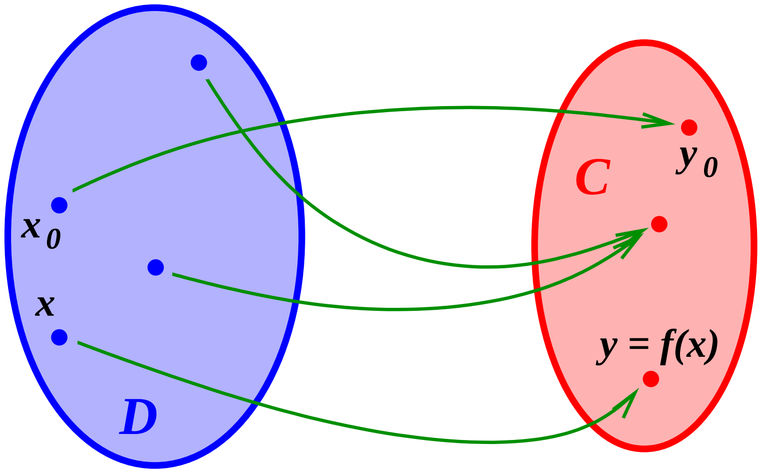
- da un rilevamento empirico
- da una formula (*legge*)

ESEMPI:

1. la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
2. la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
3. lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:
   $s = \frac{1}{2} g\, t^2$ *(moto uniformemente accelerato)*
4. la relazione tra i lati x, y di un rettangolo di area unitaria: $xy = 1$
   da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Funzioni – Definizione

Una funzione f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (dominio) fa corrispondere *uno ed un solo* elemento y di un secondo insieme C (codominio). Si dice che y è l'immagine di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.



$$f : D \to C$$

$$f : x \mapsto y = f(x)$$

Grafico di una Funzione

Sia $A \subset \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale.

Il grafico di f è l'insieme delle coppie $(x, f(x))$.

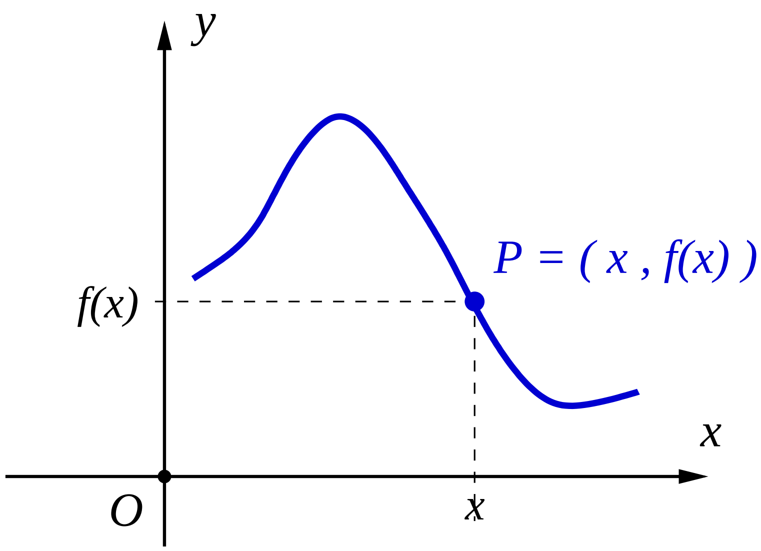


Grafico di $f = \{(x, y) : x \in A,\ y = f(x)\}$

Funzioni – Esempi

ESEMPI *(funzioni reali di una variabile reale)*:

1. $f(x) = 2x + 1 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ retta
2. $f(x) = x^2 \quad \forall\ x \in \mathbb{R}$ parabola
3. $f(x) = \sqrt{x} \quad \forall\ x \geq 0$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x} \quad \forall x \neq 0$ iperbole equilatera
5. $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ 1 & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Si dice che $f(x)$ è il valore della funzione f in x.
Nell'espressione $y = f(x)$, x è detta variabile *indipendente*, mentre y è detta variabile *dipendente*.

Funzioni Iniettive e Suriettive

- una funzione $f : D \to C$ si dice iniettiva se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

  $$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \neq f(x_2)$$

  o, equivalentemente:

  $$f(x_1) = f(x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2$$

- una funzione $f : D \to C$ si dice surgettiva se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*. In simboli:

  $$\forall\; y \in C \quad \exists\; x \in D : \quad f(x) = y$$

- una funzione $f : D \to C$ contemporaneamente iniettiva e surgettiva si dice biunivoca

Funzioni Biunivoche

Una funzione $f : D \to C$ è BIUNIVOCA (bigettiva) se

ogni $y \in C$ è *immagine* di *uno ed un solo* elemento $x \in D$.

ESEMPI:

1. $D = C = \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}$ è immagine di $x = \frac{1}{2}(y - 1)$.
2. $D = C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x}$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = y^2$.
3. $D = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ è biunivoca: $y \in \mathbb{R}_+$ è immagine di $x = -\sqrt{y}$.
4. $D = \mathbb{R}_+$, $C = \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y < 0$ non è immagine di alcun x.
5. $D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$, $f(x) = x^2$ non è biunivoca: $y = 4$ è immagine di $x = \pm 2$.

Operazioni sulle Funzioni

Date due funzioni f e g a valori reali, sull'intersezione dei due domini si possono definire:

- *funzione somma:* $s(x) = f(x) + g(x)$
- *funzione differenza:* $d(x) = f(x) - g(x)$
- *funzione prodotto:* $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
- *funzione quoziente:* $q(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ per x tale che $g(x) \neq 0$

ESEMPI:

1. *somma:* $f(x) = x, \;\; g(x) = 5 \;\; \Rightarrow \;\; (f + g)(x) = x + 5$
2. *prodotto:* $f(x) = x, \;\; g(x) = x + 5 \;\; \Rightarrow \;\; (f \cdot g)(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$
3. *quoziente:* $f(x) = x + 3, \;\; g(x) = x^2 - 1 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{x + 3}{x^2 - 1}$ per $x \neq \pm 1$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 5 \;\; \Rightarrow \;\; \dfrac{f - g}{h}(x) = \dfrac{\sqrt{x} - x^2}{x - 5}$ Qual è il dominio?

Esercizi sulle Funzioni

ESERCIZIO 1. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x - 5$ nei punti $x_1 = 1$ e $x_2 = -2$.

Soluzione: $f(1) = 2 \cdot 1 - 5 = -3, \qquad f(-2) = 2 \cdot (-2) - 5 = -9$

ESERCIZIO 2. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 2x^2 - 3x$ nel punto $x = 2$.

Soluzione: $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 = 8 - 6 = 2$

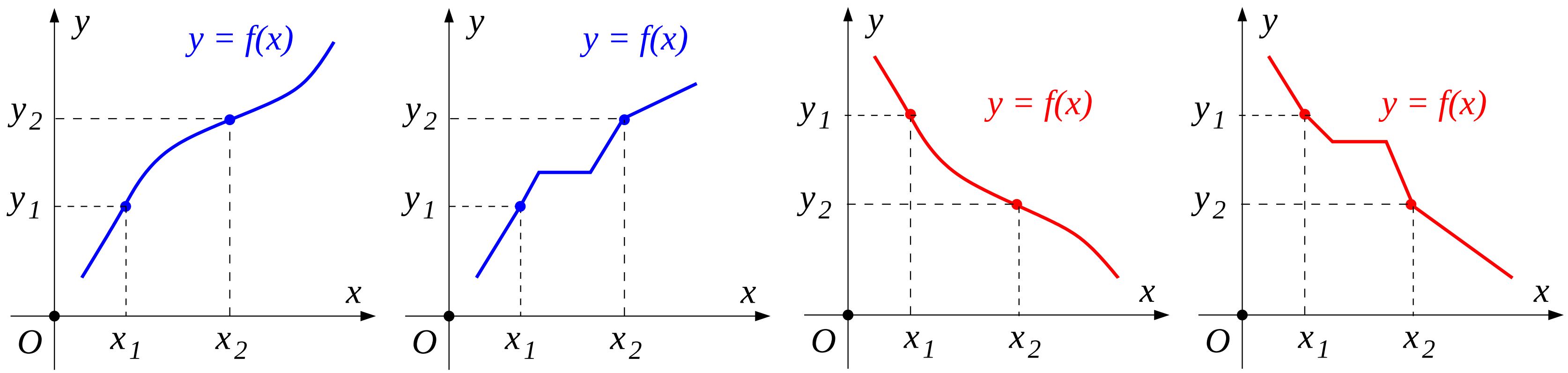
ESERCIZIO 3. Calcolare il valore della funzione $f(x) = 3x - \frac{5}{x+1}$ nel punto $x = 4$.

Soluzione: $f(4) = 3 \cdot 4 - \frac{5}{4+1} = 11$

Funzioni Monotone

Una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

- strettamente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2)$.
- debolmente crescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \leq f(x_2)$.
- strettamente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) > f(x_2)$.
- debolmente decrescente: $\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) \geq f(x_2)$.



Esercizi sulle Funzioni Monotone

ESERCIZIO 1. Dimostrare che la funzione $f(x) = 3\,x + 1$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ con $x_1 < x_2$ si ha

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 < 3\,x_2 \;\Rightarrow\; 3\,x_1 + 1 < 3\,x_2 + 1 \quad \text{cioè } f(x_1) < f(x_2).$$

Ragionando in modo analogo, si dimostra che:

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m > 0$ è strettamente crescente per $x \in \mathbb{R}$;

la funzione $f(x) = m\,x + q$ con $m < 0$ è strettamente decrescente per $x \in \mathbb{R}$.

Esercizi sulle Funzioni Monotone

ESERCIZIO 2. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente crescente per $x \geq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \geq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$0 \leq x_1 < x_2.$$

Moltiplicando per x_1 (che è non negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è strettamente positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 < (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 \leq x_1 x_2 < (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Esercizi sulle Funzioni Monotone

ESERCIZIO 3. Dimostrare che la funzione $f(x) = x^2$ è strettamente decrescente per $x \leq 0$.

Soluzione: per ogni coppia di punti $x_1, x_2 \leq 0$ con $x_1 < x_2$ abbiamo, in particolare, che

$$x_1 < x_2 \leq 0.$$

Moltiplicando per x_1 (che è strettamente negativo), si ottiene:

$$(x_1)^2 > x_1 x_2,$$

mentre moltiplicando per x_2 (che è non positivo), si ottiene:

$$x_1 x_2 \geq (x_2)^2.$$

Ne segue che

$$(x_1)^2 > x_1 x_2 \geq (x_2)^2, \quad \text{cioè} \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Minimi e Massimi di Funzione

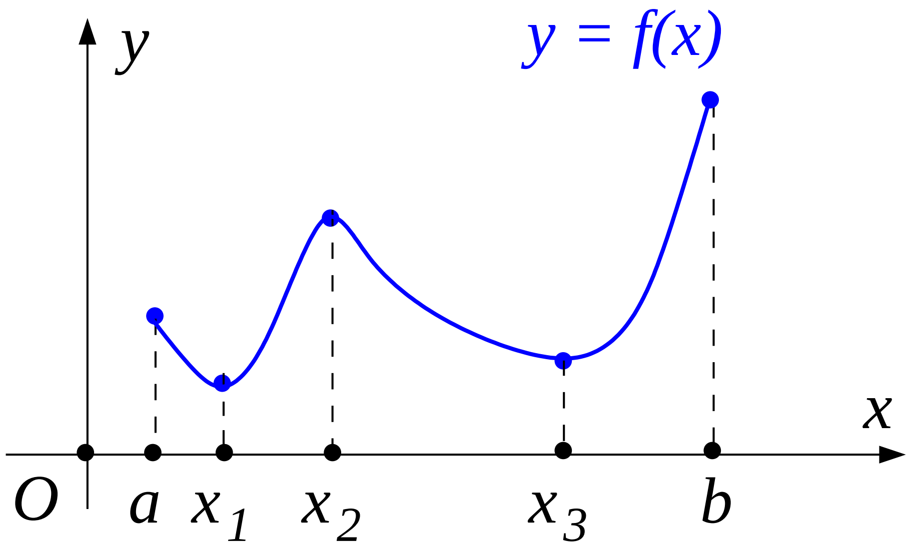
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in A$.

- minimo assoluto (o globale):
  x_0 è punto di minimo se $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in A$
- massimo assoluto (o globale):
  x_0 è punto di massimo se $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in A$
- minimo relativo (o locale):
  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se *"vicino" a* x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$
  ovvero

  x_0 è punto di minimo relativo se
  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- massimo relativo (o locale):
  si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se *"vicino" a* x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$
  ovvero

  x_0 è punto di massimo relativo se
  esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) \leq f(x_0)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e Massimi di Funzione



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.

Esercizi su Massimi e Minimi

ESERCIZIO 1. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo della funzione $f(x) = 3\,x - 2$ nell'intervallo $[1, 2]$.

Soluzione: la funzione ha come grafico una retta il cui coefficiente angolare è positivo e dunque è strettamente crescente. Quindi il massimo si ottiene nel punto 2 e il valore del massimo è 4, mentre il minimo si ottiene nel punto 1 e il valore del minimo è 1.

ESERCIZIO 2. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo della funzione $f(x) = -x^2$ nell'intervallo $[0, 5]$.

Soluzione: la funzione in $[0, 5]$ è strettamente decrescente. Quindi il massimo si ottiene nel punto 0 e il valore del massimo è 0, mentre il minimo si ottiene nel punto 5 e il valore del minimo è -25.

Esercizi su Massimi e Minimi

ESERCIZIO 3. Dire se la funzione $f(x) = x^2 + 1$ ha massimo su tutto $\mathbb{R}$. Dire se la stessa funzione ha minimo su $\mathbb{R}$.

Soluzione: la funzione non ha massimo; il minimo è ottenuto nel punto 0 e il suo valore è 1.

ESERCIZIO 4. Trovare i punti di massimo, il valore massimo, i punti di minimo e il valore minimo su $\mathbb{R}$ della funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x < -1 \\ -x+2 & \text{per } -1 \leq x \leq 2 \\ 3 & \text{per } x > 2 \end{cases}$$

Soluzione: il massimo è assunto nel punto -1 e per $x > 2$, il valore del massimo è 3. Il minimo si ottiene nel punto 2 e il valore del minimo è 0.