Funzioni Continue

Continuità in un punto: una funzione f si dice *continua* in un punto x_0 se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)\,,$$

cioè,

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)\,.$$

Continuità in un intervallo: una funzione f è *continua* in un intervallo $[a, b]$ se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \;\; \forall\, x_0 \in (a, b), \;\; \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

GRAFICAMENTE: una funzione definita su un intervallo è *continua* se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Esempi di Discontinuità

Esempio 1. $\lim_{x \to 0} f(x) \neq f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = 0, \qquad f(0) = 1.$$

Esempio 2. $\lim_{x \to 0^-} f(x) \neq \lim_{x \to 0^+} f(x)$

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ \ \ 1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1, \qquad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 1.$$

Esempio 3. $\lim_{x \to 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty.$$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 1. Stabilire se le seguenti funzioni sono continue in $\mathbb{R}$:

- $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{per } x \leq 1 \\ |x| + 2 & \text{per } x > 1 \end{cases}$$
- $$g(x) = \begin{cases} 3x^3 - 2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$
- $$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$$

Esercizi sulle Funzioni Continue

Esercizio 2. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3x^3 + x + 2 - k & \text{per } x \leq 0 \\ \sqrt{x^4 + 1} & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 3. Determinare per quali valori del parametro k la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x^5 - 3k & \text{per } x < 1 \\ 2k\, e^{x-1} & \text{per } x \geq 1 \end{cases}$$

è continua in tutto il suo insieme di definizione.

Esercizio 4. Determinare per quali valori dei parametri α, β la funzione

$$f(x) = \begin{cases} |x^2 - x| & \text{per } x \leq -1 \\ \alpha(x+2) + \beta & \text{per } -1 \leq x \leq 0 \\ x \log x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

risulta continua in $\mathbb{R}$.

Il Teorema di Weierstrass

Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato* $[a, b]$. Allora esistono il massimo e il minimo assoluti di f in $[a, b]$.

Nota. Le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema:

- $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ non ha minimo in $[-1, 1]$.

  Infatti, la funzione non è *continua*.

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ha massimo in $(0, 1]$. Infatti, l'intervallo non è *chiuso*.

- $f(x) = e^x$ non ha minimo in $(-\infty, 0]$. Infatti, l'intervallo non è *limitato*.