

Successioni

Vi sono fenomeni naturali e situazioni concrete che presentano sviluppi significativi in tempi **discreti**.

Vale a dire è naturale che i controlli per quei dati fenomeni o per quelle date situazioni avvengano ad intervalli di tempo prefissati (di minuti, ore, giorni, anni, ...).

ESEMPI:

1. aumento dello stipendio di un lavoratore dipendente per effetto degli scatti di anzianità;
2. crescita di un capitale investito ad un tasso fisso di interesse annuo;
3. crescita di una popolazione di cellule;
4. decadimento di una sostanza radioattiva.

Successioni: Progressioni Aritmetiche

Esempio 1: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del datore di lavoro)

- $S(0) = S$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari al 1,5% dello stipendio iniziale
- dopo un anno lo stipendio sarà $S(1) = S + \frac{1,5}{100} S$
- dopo 2 anni lo stipendio sarà $S(2) = S(1) + \frac{1,5}{100} S = S + 2 \frac{1,5}{100} S$
- dopo n anni lo stipendio sarà

$$S(n) = S + n \frac{1,5}{100} S = S + nd \quad \left(d = \frac{1,5}{100} S \right)$$

Si dice **successione** una corrispondenza che ad ogni intero n associa un valore $S(n)$

$$S(n) = S + nd \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{progressione aritmetica}$$

Successioni: Progressioni Geometriche

Esempio 2: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del dipendente)

- $C(0) = C$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari all'1,5% dello stipendio dell'anno precedente
- dopo un anno $C(1) = C + \frac{1,5}{100} C = C \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)$
- dopo 2 anni

$$C(2) = C(1) + \frac{1,5}{100} C(1) = C(1) \left(1 + \frac{1,5}{100}\right) = C \left(1 + \frac{1,5}{100}\right)^2$$

- posto $q = 1 + \frac{1,5}{100}$, dopo n anni lo stipendio sarà

$$C(n) = C q^n \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{progressione geometrica}$$

ESERCIZIO 5

Stabilito che la nota musicale La della ottava centrale corrisponde a una frequenza di 440 Hz e che il rapporto tra le frequenze di una nota e la frequenza della stessa nota nella ottava inferiore è 2, e sapendo che il rapporto tra la frequenza di una nota e quella della nota precedente è sempre costante, trovare una formula per calcolare la frequenza di tutte le altre note, compresi i semitoni, delle ottave del pianoforte. Soluzione:

- Ogni nota è separata dal La della ottava centrale da un numero intero di semitoni.
- Ogni 12 semitoni (quindi ogni ottava) si ha un raddoppio di frequenza. Si tratta dunque di una progressione geometrica di

ragione che dobbiamo calcolare: indichiamo con k la ragione incognita

- Indichiamo con $\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{12}, x_{13}\}$ le frequenze delle note comprese tra un La e il La successivo, cioè x_1 è 440 Hz e x_{13} è 880 Hz.
- Avremo $\frac{x_{i+1}}{x_i} = k$ per ogni i compreso tra 1 e 12.
- Dunque $\frac{x_2}{x_1} = k, \frac{x_3}{x_2} = k, \dots, \frac{x_{13}}{x_{12}} = k$ e quindi $\frac{x_{13}}{x_1} = k^{12}$ ma noi sappiamo che $\frac{x_{13}}{x_1} = 2$ e dunque $k^{12} = 2$ cioè $k = \sqrt[12]{2}$

Modelli di Crescita e Decadimento – 1

CRESCITA CELLULARE

In particolari condizioni, dopo un certo intervallo temporale, una cellula si suddivide in due nuove cellule (*dicotomia della cellula*). Queste a loro volta raddoppiano dopo un intervallo di tempo uguale al precedente.

Assumendo come unità di misura dei tempi il cosiddetto *tempo di raddoppio*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(0) = 1, \quad K(n) = 2 \cdot K(n-1) = 2^n$$

dove $K(n)$ è il numero delle cellule dopo n tempi di raddoppio.

Esercizio. Il tempo necessario per una suddivisione di una cellula è di 5 giorni. Calcolare il numero di cellule dopo 60 giorni partendo da un'unica cellula iniziale.

Soluzione: si osservi che 60 giorni corrispondono a 12 tempi di raddoppio. Il numero delle cellule è

$$K(12) = 2^{12} = 4096 \simeq 4000$$

Nota: può essere utile ricordare che $2^{10} = 1024 \simeq 1000$.

Modelli di Crescita e Decadimento – 2

DECADIMENTO RADIOATTIVO

Le sostanze radioattive *decadono* progressivamente. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto *semiperiodo* o *tempo di dimezzamento*, che rappresenta il tempo necessario perché il numero degli atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato.

Assumendo come unità di misura dei tempi il *tempo di dimezzamento*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(n) = \frac{1}{2} \cdot K(n-1) = \frac{1}{2^n} \cdot K(0)$$

dove $K(n)$ è la quantità di sostanza radioattiva dopo n tempi di dimezzamento a partire da una quantità iniziale $K(0)$.

Esercizio. Dopo quanti tempi di dimezzamento una sostanza radioattiva si è ridotta a meno di $1/4$ (cioè a meno del 25%) o a meno di $1/1000$ della quantità iniziale?

Soluzione: $K(n) = \frac{1}{2^n} K(0) \leq \frac{1}{4} K(0) \Rightarrow n = 2$

$$K(n) = \frac{1}{2^n} K(0) \leq \frac{1}{1000} K(0) \Rightarrow n = 10$$

Esercizi

Esercizio 1. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da 10^4 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 100$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari a 4.000.000 di cellule? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da 10^4 a 8.000.000 di cellule in 40 giorni?

Nota: $\log_2 10 \simeq 3,3$

Soluzione:

1. Dopo n tempi di raddoppio ci sono $2^n \cdot 10^4$ cellule; questo numero deve essere uguale a $4 \cdot 10^6$, quindi n soddisfa l'equazione:

$$2^n \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^6 \Leftrightarrow 2^n = 4 \cdot 10^2 \Leftrightarrow n = \log_2(4 \cdot 10^2),$$

cioè, $n = 2 + 2 \log_2 10 \simeq 8,6$. Quindi, dopo $100 \cdot 8,6 = 860$ giorni si hanno 4.000.000 di cellule.

2. Si ha $2^n \cdot 10^4 = 8 \cdot 10^6$, quindi $n = 3 + 2 \log_2 10$. Indicando con x il tempo di raddoppio, si ha $40 = x \cdot (3 + 2 \log_2 10)$, da cui si ricava x .

Esercizi

Esercizio 2. In una coltura batterica sono presenti inizialmente N_0 batteri. Il loro numero raddoppia ogni 3 ore. Quanti batteri ci saranno nella coltura dopo 24 ore? Quando il numero di batteri nella coltura sarà pari al 25% della quantità finale?

Soluzione:

1. Si osservi che 24 ore corrispondono a 8 tempi di raddoppio. Pertanto il numero di batteri dopo 24 ore è $2^8 \cdot N_0 = 256 \cdot N_0$.
2. Deve essere $2^n \cdot N_0 = \frac{25}{100} \cdot 256 \cdot N_0$, da cui $n = 6$. Pertanto, il numero di batteri sarà pari al 25% della quantità finale dopo 6 tempi di raddoppio, cioè dopo 18 ore.

Esercizi

Esercizio 3. Un tumore viene diagnosticato quando il suo volume è di circa 10 cm^3 . Schematizzando le cellule tumorali come cubetti di lato $10 \mu\text{m}$ e supponendo che il loro tempo di raddoppio sia di circa 100 giorni, stimare il tempo trascorso dal momento della formazione della prima cellula tumorale.

Nota: $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ $\log_2 10 \simeq 3,3$

Soluzione:

Si osservi che $10 \mu\text{m} = 10^{-3} \text{ cm}$. Il volume di una cellula è pari a $10^3 \mu\text{m}^3 = 10^{-9} \text{ cm}^3$. Pertanto un volume di 10 cm^3 contiene un numero di cellule pari a $\frac{10}{10^{-9}} = 10^{10}$.

Deve essere $2^n = 10^{10}$, da cui $n = 10 \log_2 10$. Quindi, il tempo trascorso dalla formazione della prima cellula tumorale fino al momento in cui il tumore viene diagnosticato è dato da $100 \cdot 10 \log_2 10 \simeq 3300$ giorni.

Esercizi

Esercizio 4. Un materiale radioattivo è caratterizzato da un tempo di dimezzamento pari a 800 anni. Dopo quanto tempo un campione di tale materiale si sarà ridotto del 15%? Qual è il tempo di dimezzamento di un secondo campione che si riduce del 15% in 800 anni?

Soluzione:

1. Indicando con P il peso iniziale del materiale, si deve avere $\frac{1}{2^n}P = \frac{85}{100}P$. Dunque $2^n = \frac{100}{85}$, da cui $n = \log_2 \frac{100}{85}$. Il tempo richiesto è $800 \cdot \log_2 \frac{100}{85}$.

2. Il tempo di dimezzamento del secondo campione è $\frac{800}{\log_2 \frac{100}{85}}$.

Esercizi

Esercizio 5. Un materiale radioattivo è caratterizzato da un tempo di dimezzamento pari a 1000 anni. Dopo quanto tempo un campione di 1kg di tale materiale si sarà ridotto del 20%?

Esercizi

Esercizio 6. Una sostanza radioattiva ha un tempo di dimezzamento T pari a 100 anni. Quanto tempo deve trascorrere affinché di un campione della sostanza rimanga il 40% del quantitativo iniziale?

Soluzione:

Indichiamo con P il peso iniziale. Il peso finale deve essere $\frac{40}{100}P$. Dunque $\frac{1}{2^n}P = \frac{40}{100}P$, cioè $2^n = \frac{5}{2}$, da cui $n = \log_2 \frac{5}{2}$. Il tempo richiesto è $100 \cdot \log_2 \frac{5}{2}$.

Esercizi

Esercizio 7. Una popolazione cellulare è formata all'istante $t = 0$ da N_0 cellule aventi tempo di raddoppio $T = 10$ giorni. Dopo quanti giorni la popolazione è pari a $8N_0$? Qual è il tempo di raddoppio di una seconda popolazione cellulare che passa da N_0 cellule a $8N_0$ cellule in 10 giorni?

Esercizi

Esercizio 8. Una popolazione cellulare è formata ad un certo istante da N_0 individui ed è caratterizzata da un tempo di raddoppio pari a 14 giorni. Dopo quanto tempo la popolazione risulterà composta da $10N_0$ individui? Qual è il tempo di raddoppio di un secondo campione che passa da N_0 a $10N_0$ individui in 14 giorni?

ESERCIZIO sulle progressioni

È data una successione di sfere $S(0), S(1), S(2), \dots$. La Sfera $S(0)$ ha volume $V(0) = 8\text{cm}^3$ e il volume di ciascuna sfera supera di 2cm^3 il volume della sfera che la precede nella successione. Esprimete mediante una formula:

1. Il volume $V(n)$ della generica sfera $S(n)$;
2. Il raggio $R(n)$ della generica sfera $S(n)$;
3. La successione numerica $V(0), V(1), V(2), \dots$ è una progressione aritmetica? In caso di risposta affermativa quale è la ragione?
4. La successione numerica $R(0), R(1), R(2), \dots$ è una progressione aritmetica? In caso di risposta affermativa quale è la ragione?

Esercizi Consigliati sul Libro di Testo

5a edizione: 6.19, 6.23, 6.24, 6.25, 6.26, 6.33, 6.34, 6.36, 6.37, 6.38

4a edizione: 6.3.1, 6.3.2, 6.3.7, 6.3.8, 6.3.9, 6.3.10, 6.3.18, 6.3.21,
6.3.22, 6.3.23