

Derivata della Funzione Composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi:

1. $h(x) = \frac{1}{x^4 + 5x^3 + 1}$, $h'(x) = -\frac{1}{(x^4 + 5x^3 + 1)^2} (4x^3 + 15x^2)$

2. $h(x) = (8x^3 - 6x^2)^{10}$, $h'(x) = 10(8x^3 - 6x^2)^9 (24x^2 - 12x)$

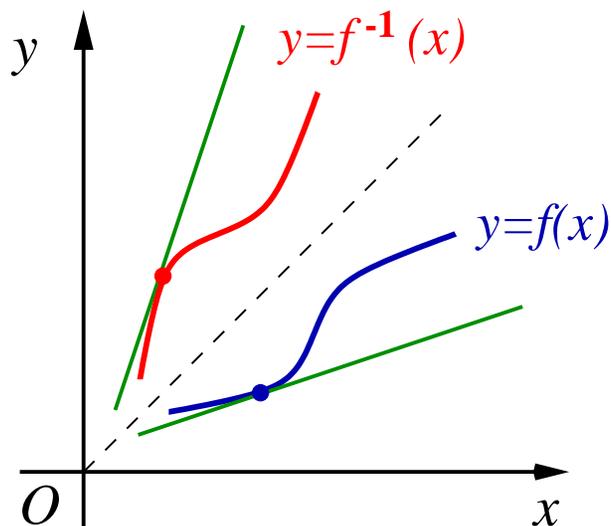
3. $h(x) = e^{x^3+2x}$, $h'(x) = (3x^2 + 2) e^{x^3+2x}$

Derivata della Funzione Inversa

Consideriamo una funzione f invertibile e derivabile con $f'(y) \neq 0$ (cioè, senza punti a tangente orizzontale).

La funzione inversa f^{-1} risulta derivabile e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



I grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.

Le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

Derivata della Funzione Inversa – Esempi

Esempio 1. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $f(y) = y^2$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[2y]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esempio 2. $f^{-1}(x) = \ln x$, $f(y) = e^y$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{[e^y]_{y=\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Derivate

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Ambito di validità
costante	0	
x	1	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$ (se n non è intero, vale per $x > 0$)
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$a > 0, x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Esercizi

- 1.** Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.
- 2.** Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \ln(x + 2)$,
- (a)** dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;
 - (b)** dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.