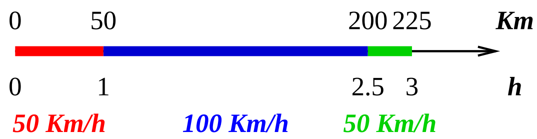
Derivata come Velocità

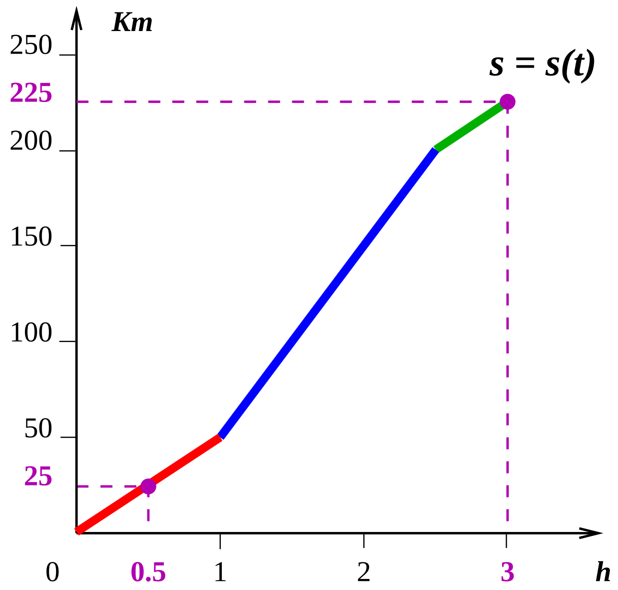


Moto rettilineo uniforme:

$$s(t) = s_0 + v \cdot (t - t_0)$$

Legge del moto:

$$s(t) = \begin{cases} 50\,t & \text{per } t \in [0,1] \\ 50 + 100\,(t-1) & \text{per } t \in (1, 2.5) \\ 200 + 50\,(t-2.5) & \text{per } t \geq 2.5 \end{cases}$$



Velocità media:

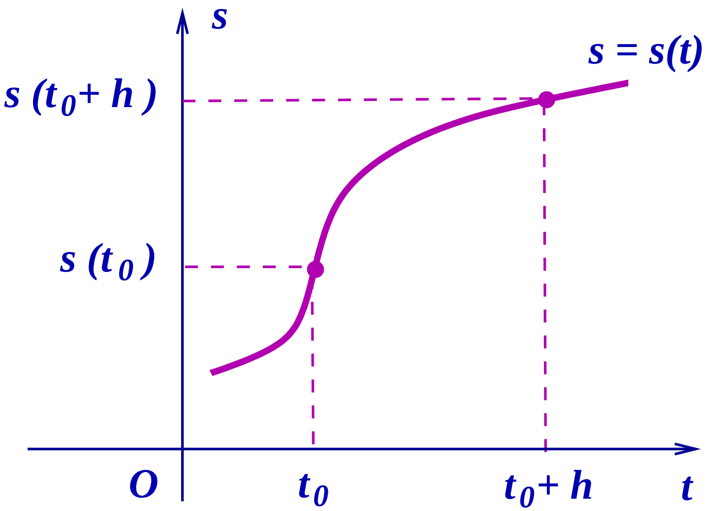
$$v_{media} = \frac{s(3) - s(0.5)}{3 - 0.5} = \frac{200}{2.5} = 80\,\text{km/h}$$

velocità media nell'intervallo $[0.5, 3]$

Velocità istantanea:

- per $t = 0.5$ $\quad v_{istantanea} = 50\,\text{km/h}$
- per $t = 2$ $\quad v_{istantanea} = 100\,\text{km/h}$
- per $t = 3$ $\quad v_{istantanea} = 50\,\text{km/h}$

Derivata come Velocità



- Velocità media:

$$v_{media} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità media sull'intervallo $[t_0, t_0 + h]$

- Velocità istantanea:

$$v_{istantanea} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità all'istante t_0

Più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e più precisa è l'informazione sull'andamento della velocità.

Esempio. Sia $s(t) = s_0 + v \cdot t$. Allora si ha:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v \cdot h}{h} = v$$

Derivata come Tasso di Accrescimento

Nel processo di crescita di un organismo il peso corporeo è una funzione del tempo: $P = P(t)$.

$P(t_0)$	peso all'istante t_0
$P(t_0 + h)$	peso all'istante $t_0 + h$
$P(t_0 + h) - P(t_0)$	variazione di peso nell'intervallo $[t_0, t_0 + h]$

Tasso medio di accrescimento: è la variazione (media) nell'unità di tempo, cioè il rapporto

$$\frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h}$$

Tasso di accrescimento all'istante t_0: il limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{P(t_0 + h) - P(t_0)}{h} = P'(t_0)\,,$$

se esiste, fornisce il *tasso di accrescimento* in t_0.

Criterio di Monotonia

Criterio di monotonia:

se f è una funzione derivabile in (a, b), si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ è debolmente decrescente in } (a, b)$$

Nota: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \quad \Longrightarrow \quad f \text{ è strettamente decrescente in } (a, b)$$

MA non valgono le implicazioni inverse!! Basta considerare la funzione $f(x) = x^3$: è strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma $f'(0) = 0$.

Criterio di Monotonia

Esempi. Determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f'(x) = 2x \geq 0 \iff x \geq 0$.

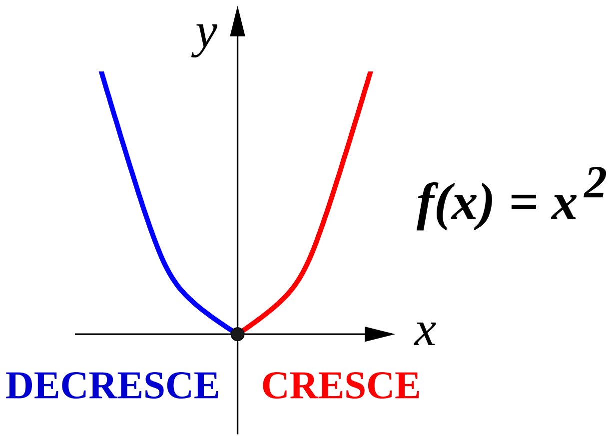
  Quindi, f è decrescente in $(-\infty, 0)$ ed è crescente in $(0, +\infty)$.

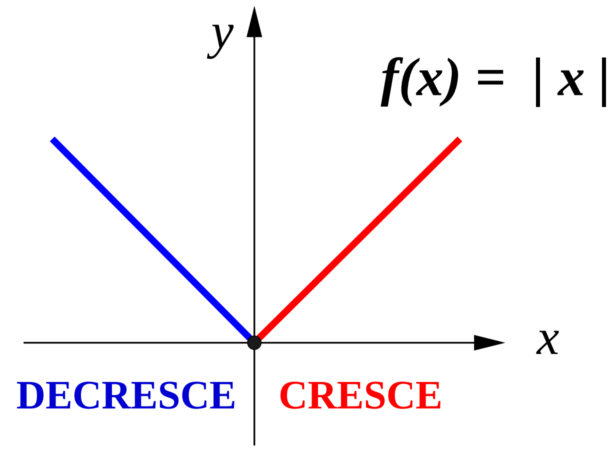
- $g(x) = (x^2 - 3)e^x$

  Si ha che: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \iff x \leq -3$ oppure $x \geq 1$.

  Quindi, g è decrescente in $(-3, 1)$ ed è crescente in $(-\infty, -3)$ e in $(1, +\infty)$.

Criterio di Monotonia

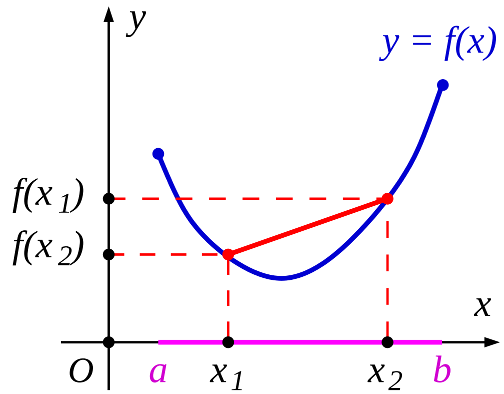




- $f'(x) = 2x < 0$ per $x < 0$
  $\Rightarrow f$ decrescente
- $f'(x) = 2x > 0$ per $x > 0$
  $\Rightarrow f$ crescente
- $x = 0$ è un *punto di minimo relativo.*
  Si ha che $f'(0) = 0$

- $f'(x) = -1 < 0$ per $x < 0$
  $\Rightarrow f$ decrescente
- $f'(x) = +1 > 0$ per $x > 0$
  $\Rightarrow f$ crescente
- $x = 0$ è un *punto di minimo relativo.*
  In $x = 0$ non esiste f'

Funzioni Concave e Convesse



Una funzione f è convessa in (a, b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico.

Una funzione f è concava in (a, b) se

$$f(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2) \geq \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a, b)$ e per ogni $\lambda \in [0, 1]$. Cioè, presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico.

Criterio di Convessità

Criterio di convessità. Se f è una funzione derivabile due volte in (a,b), si ha:

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ convessa in } (a,b)$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a,b) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \text{ concava in } (a,b)$$

Esempi. Determinare la convessità delle seguenti funzioni:

- $f(x) = x^2$

  Si ha che: $f''(x) = 2 \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Quindi, f è convessa in $\mathbb{R}$.

- $g(x) = e^{-x^2}$

  Si ha che: $g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \iff x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}}$ oppure $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

  Quindi, g è concava in $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ed è convessa in $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ e in $(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$.

Problemi di Massimo e Minimo

Punti di massimo e minimo assoluti. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.

x_0 si dice *punto di massimo assoluto* se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in A$

x_0 si dice *punto di minimo assoluto* se $f(x_0) \leq f(x)$ per ogni $x \in A$

Teorema di Weierstrass. Sia f una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato* $[a, b]$. Allora esistono il massimo e il minimo assoluti di f in $[a, b]$.

Nota. Osserviamo che le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema, esibendo dei *controesempi*:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ non ha minimo in $[-1, 1]$.

   Infatti, la funzione non è *continua*.

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ non ha massimo in $(0, 1]$. Infatti, l'intervallo non è *chiuso*.

3. $f(x) = e^x$ non ha minimo in $(-\infty, 0]$. Infatti, l'intervallo non è *limitato*.

Problemi di Massimo e Minimo

Punti di massimo e minimo locali. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in A$.
x_0 si dice *punto di massimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

x_0 si dice *punto di minimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) \quad \text{per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Teorema dei punti critici (Fermat). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a, b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in (a, b)$ e se f è *derivabile* in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

Nota: i punti in cui si annulla la derivata prima (tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo locali interni), si dicono *stazionari* o *critici*.

Criterio della derivata seconda. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo (a, b) e sia x_0 un *punto critico*.

- Se $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo locale.
- Se $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo locale.

Funzioni Definite su un Intervallo Chiuso e Limitato

1. Stabilire se la funzione è continua e trovare gli eventuali punti di discontinuità.
2. Stabilire se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile.
3. Se la funzione è continua, essa ha certamente massimi e minimi (per il Teorema di Weierstrass).
4. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
   - gli estremi dell'intervallo: a, b;
   - gli eventuali punti $z \in (a, b)$ in cui la funzione non è derivabile; indichiamo con A questo insieme;
   - gli eventuali punti $\bar{x} \in (a, b)$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$; indichiamo con B tale insieme.

Funzioni Definite su un Intervallo Chiuso e Limitato

5. Il valore massimo (assoluto) è il massimo tra questi valori:

$$f(a), \quad f(b), \quad f(z) \text{ per } z \in A, \quad f(\bar{x}) \text{ per } \bar{x} \in B$$

6. I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ è uguale al valore massimo.

7. Il valore massimo è unico. I punti di massimo non sono necessariamente unici.

Esercizi

Esercizio 1. Studiare monotonia, massimi e minimi delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$

(b) $f(x) = e^{(x-4)^2}$

(c) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(4 - x^2)}$

Esercizio 2. Studiare concavità e convessità delle seguenti funzioni:

(a) $f(x) = \ln(1 + x^2)$

(b) $f(x) = 2xe^{x^2+4}$

Esercizi

Esercizio 3. Determinare massimo e minimo assoluti della funzione

$$f(x) = |x^2 - 4x + 3|$$

nell'intervallo $[0, 5]$. Nell'intervallo aperto $(0, 5)$ la funzione ammette ancora massimo e minimo assoluti?

Esercizio 4. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 1}$$

e tracciarne un grafico qualitativo.

Esercizi

Esercizio 5. Date le funzioni $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ e $g(x) = 2x - 1$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione;

(c) disegnare un grafico qualitativo di f, di g, di $f \circ g$ e di $g \circ f$.

Esercizio 6. Date le funzioni $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \ln|x|$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e disegnarne un grafico qualitativo;

(b) dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata nel punto $x = 3$.

Regola di de l'Hôpital

Teorema di de l'Hôpital. Siano f, g due funzioni derivabili nell'intervallo aperto (a, b), escluso al più il punto x_0, tali che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

e $g'(x) \neq 0$ per x vicino a x_0. Se esiste il limite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Osservazione: il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per $x \to \pm\infty$ e per le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$.

Regola di de l'Hôpital – Esempi

1) $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$

2) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{\log x}{x^5} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{5x^5} = 0$

3) $\displaystyle \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

ATTENZIONE: la regola di de l'Hôpital è utile quando il limite di f'/g' esiste. Ad esempio:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{3x + \cos x}{2x + 1} = \frac{3}{2}, \text{ mentre non esiste } \lim_{x\to +\infty} \frac{3 + \sin x}{2}.$$