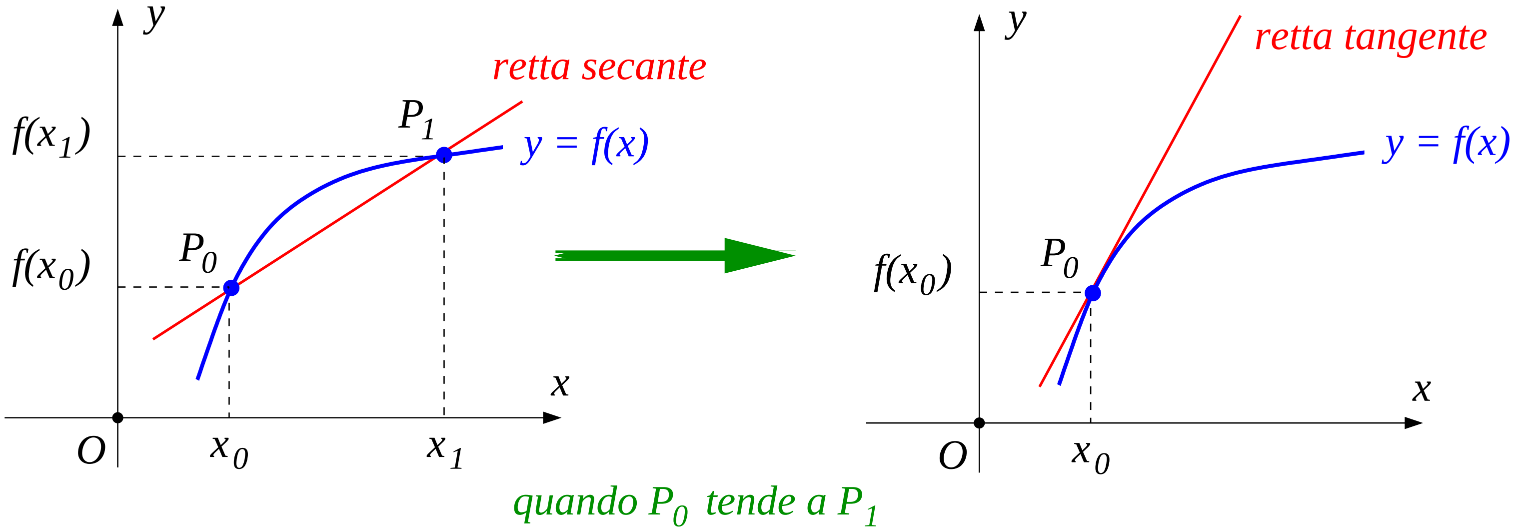
Retta Tangente



Consideriamo una funzione continua f. Siano $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ due punti appartenenti al grafico della funzione.

Al tendere di x_1 a x_0, il punto P_1 si avvicina al punto P_0 e la retta secante tende ad assumere una posizione limite, che prende il nome di retta tangente al grafico nel punto P_0.

Retta Tangente

L'equazione della retta secante per i due punti P_0, P_1 è data da

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) + f(x_0).$$

L'espressione del coefficiente angolare

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si chiama *rapporto incrementale* della funzione f nel punto x_0.

Se esiste finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

rappresenta il coefficiente angolare della *retta tangente* di equazione:

$$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + f(x_0).$$

Il valore $f'(x_0)$ è per definizione *la derivata prima* di f in x_0.

Derivate – Definizione

Se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

la funzione f si dice derivabile in x_0.

Il valore del limite è per definizione la derivata di f nel punto x_0.

La derivata si indica con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \quad \frac{df}{dx}(x_0) \quad Df(x_0) \quad \frac{dy}{dx}(x_0).$$

Nel lucido precedente $h = x_1 - x_0$ e $x_1 = x_0 + h$.

Derivate - Esempi

Esempio 1: $f(x) = c$ funzione costante

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = 0$$

Esempio 2: $f(x) = mx + q$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{mh}{h} = m$$

Esempio 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Esempio 4: $f(x) = e^x$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Derivate – Operazioni

Siano f, g due funzioni *derivabili* e $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Prodotto per una costante: $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- Somma: $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- Prodotto: $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
- Quoziente: $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Calcolo di Alcune Derivate

- $f(x) = x^3 = x \cdot x^2\,, \qquad f'(x) = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

  Iterando il procedimento: $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N}\,, \quad f'(x) = n\,x^{n-1}$

- $f(x) = 5x^3 - 3x^2 + 10x - 7\,, \qquad f'(x) = 15x^2 - 6x + 10$

- $f(x) = x^2 + e^x\,, \qquad f'(x) = 2x + e^x$

- $f(x) = \dfrac{1}{x}\,, \qquad f'(x) = \dfrac{0 \cdot x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$

  Iterando il procedimento: $f(x) = \dfrac{1}{x^n}\,, \quad f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$

- $f(x) = \dfrac{x^5 + 2}{e^x}\,, \qquad f'(x) = \dfrac{5x^4 e^x - (x^5 + 2)\,e^x}{e^{2x}}$

Derivata della Funzione Composta

Se g è una funzione derivabile in x e f è una funzione derivabile in $g(x)$, allora

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Esempi:

1. $h(x) = \dfrac{1}{x^4 + 5x^3 + 1}\,, \qquad h'(x) = -\dfrac{1}{(x^4 + 5x^3 + 1)^2}\,(4x^3 + 15x^2)$

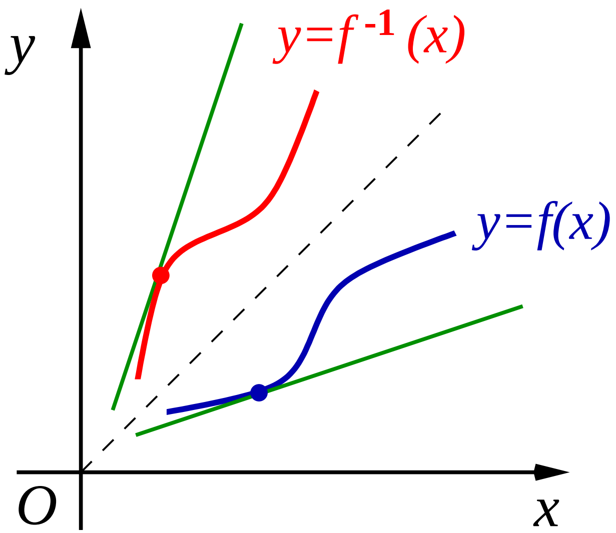
2. $h(x) = (8x^3 - 6x^2)^{10}\,, \qquad h'(x) = 10\,(8x^3 - 6x^2)^9\,(24x^2 - 12x)$

3. $h(x) = e^{x^3 + 2x}\,, \qquad h'(x) = (3x^2 + 2)\,e^{x^3 + 2x}$

Derivata della Funzione Inversa

Consideriamo una funzione f *invertibile* e *derivabile* con $f'(y) \neq 0$ (cioè, senza punti a tangente orizzontale).
La funzione inversa f^{-1} risulta *derivabile* e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$



I grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.

Le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

Derivata della Funzione Inversa – Esempi

Esempio 1. $f^{-1}(x) = \sqrt{x}\,, \quad f(y) = y^2$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\Big[2y\Big]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Esempio 2. $f^{-1}(x) = \ln x\,, \quad f(y) = e^y$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\Big[e^y\Big]_{y=\ln x}} = \frac{1}{x}$$

Derivate

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Ambito di validità
costante	0	
x	1	
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{R}$ (se n non è intero, vale per $x > 0$)
e^x	e^x	
a^x	$a^x \cdot \ln a$	$a > 0$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
$\log_a x$	$\frac{1}{x} \cdot \log_a e$	$a > 0,\ x > 0$
$\sin x$	$\cos x$	
$\cos x$	$-\sin x$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Derivabilità e Continuità

Derivabilità $\Rightarrow$ Continuità :

se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0.

Infatti, per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$.

Consideriamo l'uguaglianza:

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Passando al limite, si ricava la continuità in x_0:

$$\lim_{x \to x_0} \Big(f(x) - f(x_0) \Big) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Continuità $\not\Rightarrow$ Derivabilità :

1. $y = |x|$ *(punto angoloso)* 2. $y = \sqrt[3]{x^2}$ *(punto cuspidale)*

Queste funzioni sono continue, ma non derivabili in $x = 0$.

Esercizi

1. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x - 1$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;

(b) dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

2. Date le funzioni $f(x) = 2x - 5$ e $g(x) = \ln(x + 2)$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata;

(b) dire quanto vale $g \circ f$, qual è il suo insieme di definizione e quanto vale la sua derivata.

Esercizi

3. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \geq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

studiarne derivabilità e continuità.

4. Calcolare le derivate prime delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \mathrm{e}^{\cos x}$$

$$g(x) = x^3 \sin x$$

$$h(x) = x^4 - x^3 + 7x$$

Esercizi

5. Calcolare il coefficiente angolare m_1 della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\cos x}$$

nel punto $x = 0$.

Calcolare il coefficiente angolare m_2 della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$$

nel punto $x = 1$.

Esercizi

6. Calcolare il coefficiente angolare m_1 della retta tangente al grafico della funzione

$$f(x) = e^{2x-1} + \cos x$$

nel punto $x = 0$.

Calcolare il coefficiente angolare m_2 della retta tangente al grafico della funzione

$$g(x) = \frac{x^2 + 1}{\log(1 + x)}$$

nel punto $x = 1$.