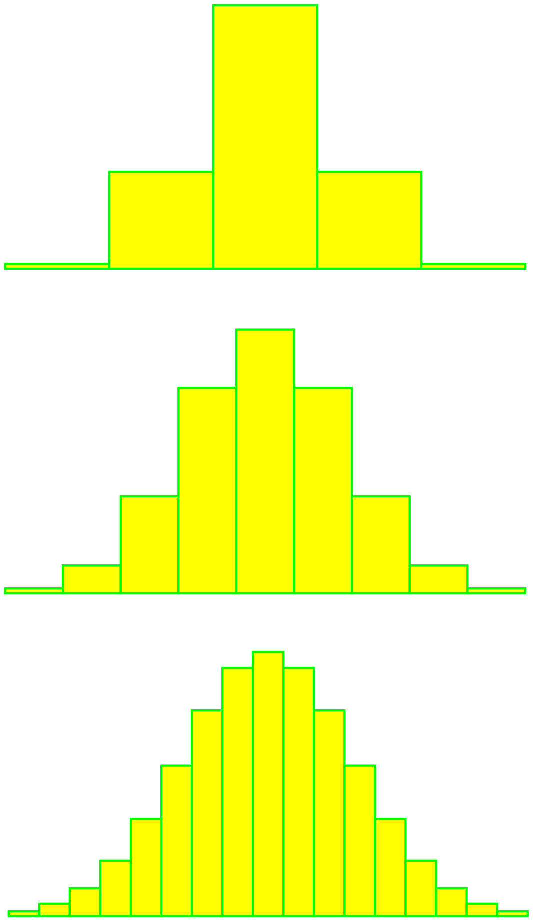
Distribuzione Normale

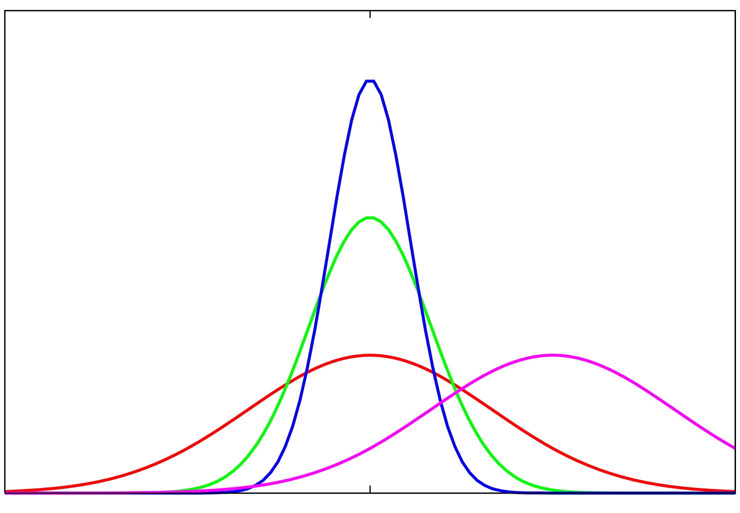


- istogramma delle frequenze di un insieme di misure di una grandezza che può variare con *continuità*
- popolazione molto numerosa, costituita da una quantità praticamente illimitata di individui *(popolazione infinita)*
- area dell'istogramma uguale a 1 *(normalizzata)*
- aumentando il numero di intervallini $n = 5, 9, 17, \ldots$ l'istogramma tende a stabilizzarsi intorno a una forma limite: *la curva di distribuzione delle frequenze*
- nel caso in figura $y = A\,e^{-B\,(x-C)^2}$ *distribuzione normale o gaussiana*

Distribuzione Normale

CURVE GAUSSIANE

$$y = A\, e^{-B\,(x-C)^2}$$



Se la distribuzione è di tipo gaussiano con

- *media aritmetica* μ
- *deviazione standard* σ

si ha $\quad A = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}} \quad B = \dfrac{1}{2\,\sigma^2} \quad C = \mu$

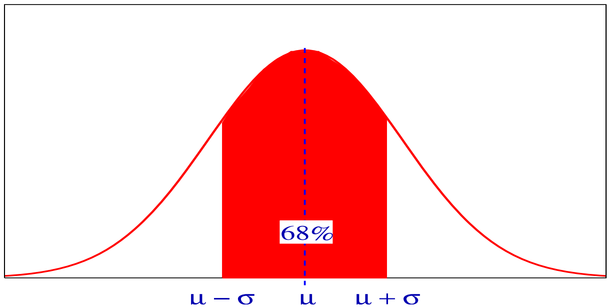
La corrispondente curva normale sarà

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\,\sigma^2}}$$

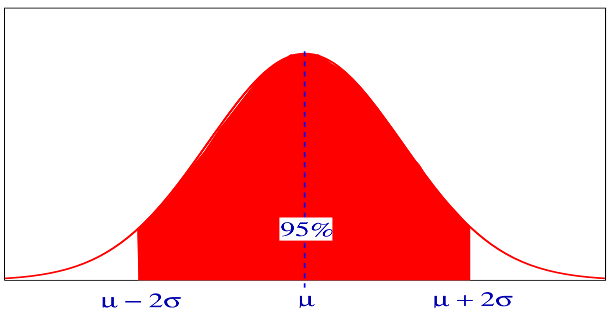
CURVA NORMALE STANDARDIZZATA:

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\,\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}} \qquad \mu = 0\,,\ \sigma = 1$$

Distribuzione Normale



nell'intervallo $[\mu-\sigma, \mu+\sigma]$ cadono circa il 68% delle misure



nell'intervallo $[\mu-2\sigma, \mu+2\sigma]$ cadono circa il 95% delle misure

valori di u	Nell'intervallo $[\mu-u\sigma, \mu+u\sigma]$	Fuori dell'intervallo $[\mu-u\sigma, \mu+u\sigma]$	Nell'intervallo $[\mu+u\sigma, +\infty)$
0	0	1	$0,5$
$0,2$	$0,1586$	$0,8414$	$0,4207$
$0,4$	$0,3108$	$0,6892$	$0,3446$
$0,6$	$0,4514$	$0,5486$	$0,2743$
$0,8$	$0,5762$	$0,4238$	$0,2119$
1	$0,6826$	$0,3174$	$0,1587$
$1,2$	$0,7698$	$0,2302$	$0,1151$
$1,4$	$0,8384$	$0,1616$	$0,0808$
$1,6$	$0,8904$	$0,1096$	$0,0548$
$1,8$	$0,9282$	$0,0718$	$0,0359$
2	$0,9544$	$0,0456$	$0,0228$
$2,2$	$0,9722$	$0,0278$	$0,0139$
$2,4$	$0,9836$	$0,0164$	$0,0082$
$2,6$	$0,9906$	$0,0094$	$0,0047$
$2,8$	$0,9950$	$0,0050$	$0,0025$
3	$0,9974$	$0,0026$	$0,0013$
$3,2$	$0,9986$	$0,0014$	$0,0007$

fissati due valori a, b sull'asse delle ascisse, l'area sottesa dal grafico sull'intervallo $[a, b]$ rappresenta la porzione di misure che cadono nell'intervallo considerato.

Distribuzione Normale - Esercizio 1

Problema - Supponendo che la distribuzione dei pesi degli individui di una popolazione sia gaussiana con media $\mu = 61\,kg$ e deviazione standard *(scarto quadratico medio)* $\sigma = 5\,kg$

1. scrivere l'equazione della gaussiana relativa ai pesi di tale popolazione
2. calcolare la percentuale di individui il cui peso è compreso tra $59\,kg$ e $63\,kg$

Soluzione -

1. l'equazione della gaussiana è la seguente

$$y = \frac{1}{5\sqrt{2\,\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-61)^2}{50}}$$

2. l'area sotto in grafico di tale gaussiana nell'intervallo di peso

   $$[\,59\,,\,63\,] = [\,61 - 0.4 \cdot 5\,,\,61 + 0.4 \cdot 5\,] = [\,\mu - 0.4\,\sigma\,,\,\mu + 0.4\,\sigma\,]$$

   vale 0.3108. La percentuale cercata è del $31\,\%$

Distribuzione Normale - Esercizio 2

Problema - Le altezze h di un gruppo di reclute sono distribuite con buona approssimazione secondo una curva gaussiana con media $\mu = 170\,cm$ e deviazione standard *(scarto quadratico)* $\sigma = 5\,cm$. Le divise sono disponibili in 5 taglie:

1. per individui di altezza $\leq 161\ cm$
2. per individui di altezza compresa tra 161 e 167 cm
3. per individui di altezza compresa tra 167 e 173 cm
4. per individui di altezza compresa tra 173 e 179 cm
5. per individui di altezza $> 179\ cm$.

Stimare il numero delle divise delle varie taglie sapendo che le reclute sono 750.

Soluzione - Si tratta di stimare la percentuale di reclute che cade in ciascuna delle quattro differenti classi di altezza:

1. per $h \leq 161 = 170 - 1.8\,\sigma \ \Rightarrow$ 3.6% (27 reclute)
2. per $161 < h \leq 167 \ \Rightarrow \ h \in]\,170 - 1.8\,\sigma\,,\ 170 - 0.6\,\sigma\,] \ \Rightarrow$ 24% (180 reclute)
3. per $167 < h \leq 173 \ \Rightarrow \ h \in]\,170 - 0.6\,\sigma\,,\ 170 + 0.6\,\sigma\,] \ \Rightarrow$ 45% ($\approx$ 338 reclute)
4. per $173 < h \leq 179 \ \Rightarrow \ h \in]\,170 + 0.6\,\sigma\,,\ 170 + 1.8\,\sigma\,] \ \Rightarrow$ 24% (180 reclute)
5. per $h > 179 = 170 + 1.8\,\sigma \ \Rightarrow$ 3.6% (27 reclute)

Teorema Centrale del Limite

PROBLEMA - Determinare come la media campionaria $\overline{x}$ e la deviazione standard campionaria s misurino la media μ e la deviazione standard σ della popolazione.

Sia data una popolazione numerica di media μ e deviazione standard σ e si estraggano da essa dei campioni casuali $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$,...$\mathcal{C}_M$, ciascuno formato da n individui, con $n > 30$. Possiamo calcolare la media campionaria $\overline{x}_i$ di ciascun campione $\mathcal{C}_i$, $(i = 1, 2, ..., M)$ ed ottenenere così un nuovo insieme numerico, quello delle M medie campionarie.

Come si distribuiscono le medie campionarie?

Manifestano una tendenza in un certo senso *universale*, seguendo una *legge generale*, oppure il loro comportamento dipende dalla distribuzione della popolazione?

Teorema Centrale del Limite

Teorema - Sia data una popolazione numerica infinita di media μ e deviazione standard *(scarto quadratico medio)* σ da cui vengono estratti dei campioni casuali formati ciascuno da n individui, con $n > 30$. La distribuzione delle medie campionarie tende ad una distribuzione gaussiana di media $\mu_{\overline{x}} = \mu$ e deviazione standard $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Anche una popolazione non segue il modello gaussiano, le medie campionarie, calcolate su campioni abbastanza grandi, tendono a distribuirsi secondo una legge gaussiana.

Il teorema vale anche se la popolazione è finita ed il campionamento è fatto con ripetizioni, ammettendo cioè che un individuo possa entrare in più di un campione. Se la popolazione è di dimensione finita N ed il campionamento senza ripetizioni, il teorema vale ancora, ma lo scarto quadratico medio diventa $\sigma_{\overline{x}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\dfrac{N-n}{N-1}}$.

Intervalli di confidenza - 1

Come si utilizza il teorema cenrale del limite ?

- supponiamo di avere un campione casuale abbastanza grande
- calcoliamo la *media campionaria* $\overline{x}$.
- distribuzione delle medie campionarie è gaussiana, quindi:
  - il 99% dei dati cade nell'intervallo $[\,\mu - 2.58\,\sigma_{\overline{x}}\,,\,\mu + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}\,]$ ovvero per il 99% dei campioni:
  $$\mu - 2.58\,\sigma_{\overline{x}} \leqslant \overline{x} \leqslant \mu + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}$$
  - il 95% dei dati cade nell'intervallo $[\,\mu - 1.96\,\sigma_{\overline{x}}\,,\,\mu + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}\,]$ ovvero per il 95% dei campioni:
  $$\mu - 1.96\,\sigma_{\overline{x}} \leqslant \overline{x} \leqslant \mu + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}$$
  - ...

Intervalli di confidenza - 2

- lette in termini di μ le disuguaglianze precedenti, definiscono gli **intervalli di confidenza** per la media μ della popolazione:
  - intervallo di confidenza al 99 % $\quad \overline{x} - 2.58\,\sigma_{\overline{x}} \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + 2.58\,\sigma_{\overline{x}}$
  - intervallo di confidenza al 95 % $\quad \overline{x} - 1.96\,\sigma_{\overline{x}} \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + 1.96\,\sigma_{\overline{x}}$
  - ...
- l'ampiezza degli intervalli di confidenza è espressa in funzione di
$$\sigma_{\overline{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
che dipende dalla deviazione standard, **incognita**, della popolazione

Intervalli di confidenza - 3

- si può dimostrare che la *deviazione standard campionaria*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

approssima bene la deviazione standard σ della popolazione

- possiamo scrivere gli intervalli di confidenza nella forma
  - al 99 % $\quad \overline{x} - 2.58\,\frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + 2.58\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
  - al 95 % $\quad \overline{x} - 1.96\,\frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \overline{x} + 1.96\,\frac{s}{\sqrt{n}}$
  - . . .

che **dipende solo dai dati campionari** $(\overline{x}\,,\, s\,,\, n)$**.**

Curva Gaussiana - 1

valori di u	Nell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Fuori dell'intervallo $[\mu - u\sigma, \mu + u\sigma]$	Nell'intervallo $[\mu + u\sigma, +\infty)$
0	0	1	$0,5$
$0,2$	$0,1586$	$0,8414$	$0,4207$
$0,4$	$0,3108$	$0,6892$	$0,3446$
$0,6$	$0,4514$	$0,5486$	$0,2743$
$0,8$	$0,5762$	$0,4238$	$0,2119$
1	$0,6826$	$0,3174$	$0,1587$
$1,2$	$0,7698$	$0,2302$	$0,1151$
$1,4$	$0,8384$	$0,1616$	$0,0808$
$1,6$	$0,8904$	$0,1096$	$0,0548$
$1,8$	$0,9282$	$0,0718$	$0,0359$
2	$0,9544$	$0,0456$	$0,0228$
$2,2$	$0,9722$	$0,0278$	$0,0139$
$2,4$	$0,9836$	$0,0164$	$0,0082$
$2,6$	$0,9906$	$0,0094$	$0,0047$
$2,8$	$0,9950$	$0,0050$	$0,0025$
3	$0,9974$	$0,0026$	$0,0013$
$3,2$	$0,9986$	$0,0014$	$0,0007$

Curva Gaussiana - 2

aree sottese dalla curva gaussiana sull'intervallo [μ , μ + z σ]

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,10	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,20	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,30	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,40	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,50	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,60	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,70	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2704	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,80	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,90	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,00	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,10	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,20	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,30	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,40	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,50	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,60	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,4535	0,4545
1,70	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,80	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,90	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	**0,4750**	0,4756	0,4761	0,4767
2,00	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4812	0,4817
2,10	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,20	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4875	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,30	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,40	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,50	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	**0,4951**	0,4952
2,60	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,70	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,80	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,90	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4986
3,00	0,4987	0,4987	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990

Esercizio Biblioteca - 01

ESERCIZIO 1 - Si vuole stimare l'età media degli utenti di una biblioteca civica. A questo scopo si seleziona un campione casuale composto da $n = 100$ persone avente media $\overline{x} = 29$ $anni$ e deviazione standard $s = 8$ $anni$. Trovare intervalli di confidenza per la l'età media μ al 95% ed al 99%.

Poiché il campione è composto da $n = 100 > 30$ individui, possiamo applicare il teorema centrale del limite:

- nel 95% dei casi la media μ appartiene all'intervallo

  $$29 - 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu < 29 + 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  inserendo i dati proposti concludiamo che $27.43 < \mu < 30.57$ con un grado di fiducia pari al 95%.
- nel 99% dei casi la media μ appartiene all'intervallo

  $$29 - 2.58 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leqslant \mu < 29 + 2.58 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

  inserendo i dati proposti concludiamo che $26.93 < \mu < 31.07$ con un grado di fiducia pari al 99%.

Esercizio Biblioteca - 02

ESERCIZIO 2 - Nell'esercizio precedente, si supponga che i dati $\overline{x} = 29\ anni$ e deviazione standard $s = 8\ anni$ siano stati ottenuti da un campione casuale composto da $n = 400$ persone. Trovare i nuovi intervalli di confidenza per l'età media μ al 95% ed al 99%.

L'unico cambiamento riguarda il fatto che

$$\frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$$

.

L'intervallo di confidenza al 95% è $28.21 < \mu < 29.79$.

L'intervallo di confidenza al 99% è $27.96 < \mu < 30.04$.

Rispetto all'esercizio precedente gli intervalli si sono ridotti di ampiezza e dunque la stima è più precisa. Il maggior grado di precisione è dovuto al fatto che i dati provengono da un campione più ampio.

Esercizio Proposti

ESERCIZIO 4 - Il diametro di certe biglie di acciaio segue una distribuzione gaussiana di media $\mu = 6.2\,mm$ e deviazione standard $\sigma = 0.05\,mm$. Dire qual è la percentuale di biglie con diametro compreso tra $6.3\,mm$ e $6.35\,mm$.

RISPOSTA: $[\,6.3, 6.35\,] = [\,\mu + 2\sigma, \mu + 3\sigma\,] \Rightarrow 2.15\%$

ESERCIZIO 5 - Si vuole stimare l'età media μ di una popolazione di pazienti affetti da una certa malattia. Su un campione casuale composto da 576 pazienti affetti dalla malattia risulta un'età media $\bar{x} = 12$ anni e una deviazione standard campionaria $s = 4$ anni.

Trovare l'intervallo di confidenza al 95% per l'età media μ dei malati.

$$\left[12 - 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{576}}, 12 + 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{576}}\right] = [12 - 1.96 \cdot 0.1\overline{6}, 12 + 1.96 \cdot 0.1\overline{6}] = [11.67, 12.33]$$

Come cambia la stima se gli stessi dati $\bar{x}$, s sono ottenuta a partire da un campione composto da 1000 pazienti?

$$\left[12 - 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1000}}, 12 + 1.96 \cdot \frac{4}{\sqrt{1000}}\right] = [11.75, 12.25]$$

Esercizio Pecore - 1

Nella seguente tabella sono riportati, raggruppati in classi, i dati relativi al diametro x delle fibre del pelo di un campione di 50 pecore affette da dermatofilosi.

diametro ($10^{-1}\,mm$)	f_i
17.75 – 19.75	4
19.75 – 21.75	10
21.75 – 23.75	20
23.75 – 25.75	11
25.75 – 27.75	4
27.75 – 29.75	1
	50

1. calcolare media e deviazione standard campionarie, utilizzando la trasformazione $y = \frac{1}{2}(x - 18.75)$
2. rappresentare graficamente la distribuzione delle frequenze
3. rappresentare graficamente la distribuzione delle frequenze cumulate, indicando sull'asse delle x la posizione della mediana
4. costruire l'intervallo di confidenza al 95 % del diametro medio μ nella popolazione

Esercizio Pecore - 2

la trasformazione suggerita $y = \dfrac{1}{2}(x - 18.75)$ semplifica il calcolo della media e della deviazione standard campionarie

diametro $(10^{-1}\,mm)$	x	f	y	$f\,y$	y^2	$f\,y^2$
$17.75 - 19.75$	18.75	4	0	0	0	0
$19.75 - 21.75$	20.75	10	1	10	1	10
$21.75 - 23.75$	22.75	20	2	40	4	80
$23.75 - 25.75$	24.75	11	3	33	9	99
$25.75 - 27.75$	26.75	4	4	16	16	64
$27.75 - 29.75$	28.75	1	5	5	25	25
		50		104		278

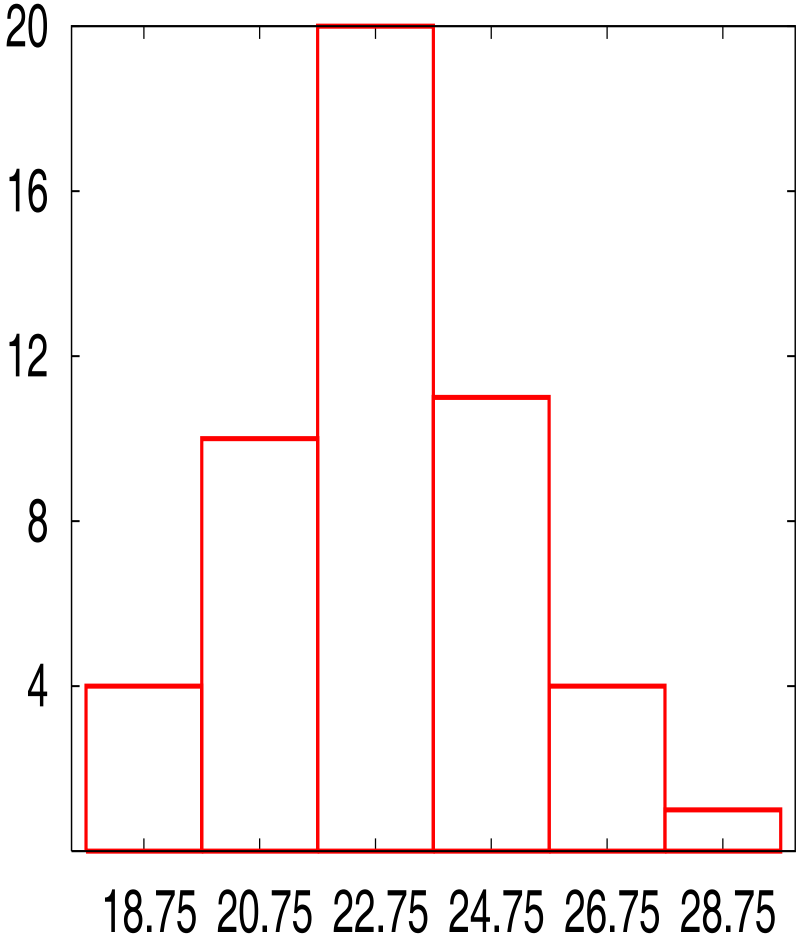
quindi

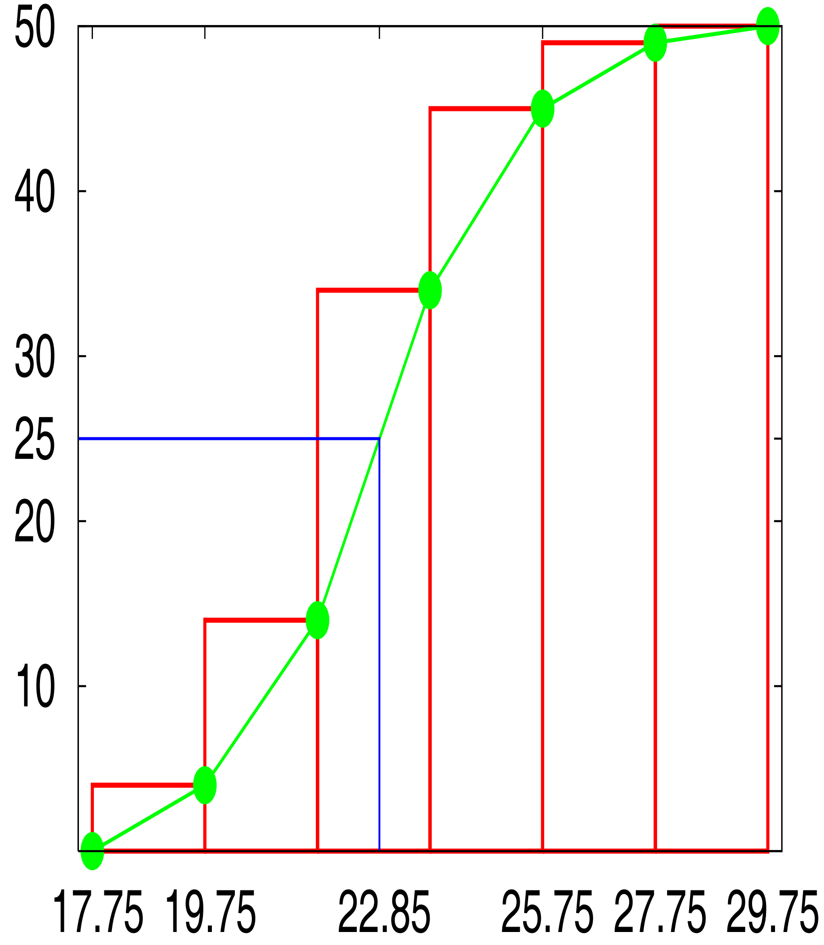
$$\bar{y} = \frac{104}{50} = 2.08 \qquad s_y^2 = \frac{1}{49}\left[278 - 50 \cdot 2.08^2\right] = 1.2588 \qquad s_y = \sqrt{s_y^2} = 1.12$$

tornando a x mediante la trasformazione inversa $x = 2\,y + 18.75$

$$\bar{x} = 2 \cdot (2.08) + 18.75 = 22.91(\cdot 10^{-1}\,mm) \qquad s_x = 2 \cdot (1.12) = 2.24(\cdot 10^{-1}\,mm)$$

Esercizio Pecore - 3





Esercizio Pecore - 4

INTERVALLO DI CONFIDENZA AL 95 %

- utilizzando le tavole riportate sul libro di testo

$$\mu = \bar{x} \pm 2 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 22.91 \pm 2 \cdot \frac{2.24}{\sqrt{50}} \approx 22.91 \pm 0.634\,(10^{-1}\,mm)$$

- utilizzando tavole più accurate

$$\mu = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{s_x}{\sqrt{n}} = 22.91 \pm 1.96 \cdot \frac{2.24}{\sqrt{50}} \approx 22.91 \pm 0.621\,(10^{-1}\,mm)$$