

# Rette 1

---

- nel piano cartesiano ogni equazione di primo grado

$$a x + b y + c = 0$$

con  $a$  e  $b$  non contemporaneamente nulli, rappresenta una retta e viceversa ogni retta può essere descritta con un'equazione di questo tipo.

- due equazioni con coefficienti  $a$ ,  $b$ ,  $c$  *proporzionali* rappresentano la medesima retta, ad esempio:

$$2 x + y + 5 = 0 \quad \text{e} \quad 6 x + 3 y + 15 = 0$$

- CASI PARTICOLARI:

1.  $a = 0$  :  $b y + c = 0$  rappresenta una retta *orizzontale*

2.  $b = 0$  :  $a x + c = 0$  rappresenta una retta *verticale*

## Rette 2

---

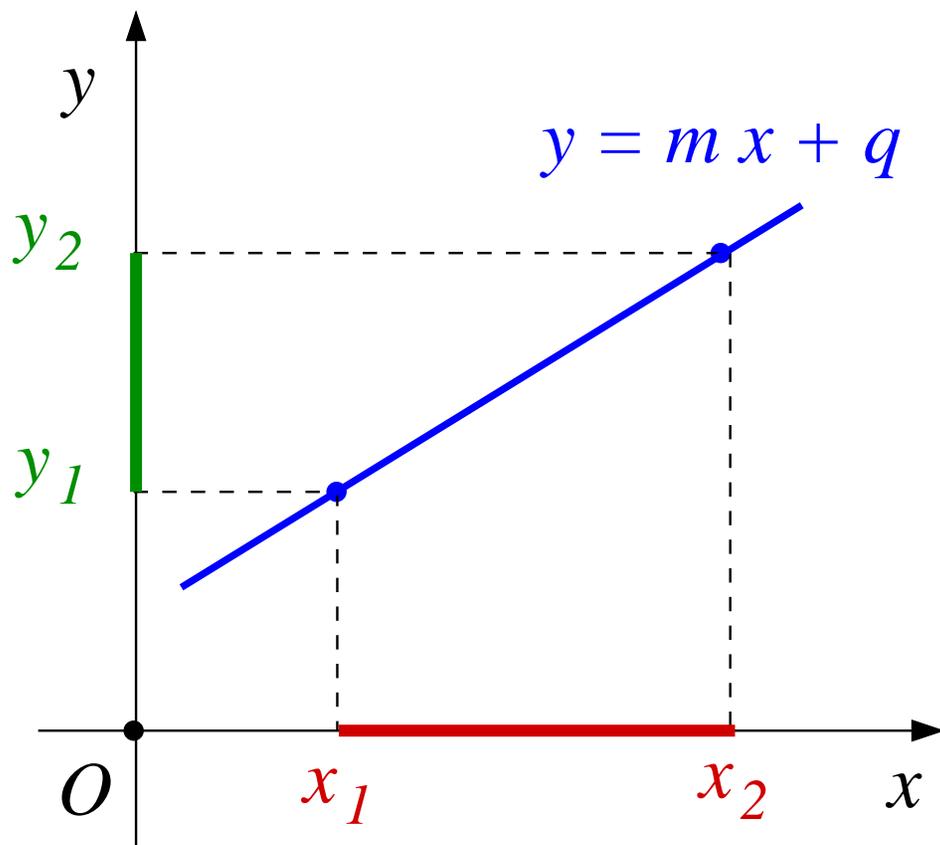
- se  $b \neq 0$  l'equazione della retta può essere riscritta, risolvendo rispetto ad  $y$

$$y = mx + q \quad \text{dove} \quad m = -\frac{a}{b}, \quad q = -\frac{c}{b}$$

- $m$  si chiama **coefficiente angolare**, rappresenta la *pendenza*
- $q$  rappresenta l'ordinata dell'intersezione con l'asse verticale  $y$
- **CONSIDERAZIONI:**
  1. una retta (con  $b \neq 0$ ) passa per l'origine  $O = (0, 0)$  se e solo se  $q = 0$
  2. due rette di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m^*x + q^*$  sono *parallele* se e solo se  $m^* = m$
  3. due rette di equazioni  $y = mx + q$  e  $y = m^*x + q^*$  sono *perpendicolari* se e solo se  $m^* = -\frac{1}{m}$

## Rette 3

---



$$y_1 = mx_1 + q$$

$$y_2 = mx_2 + q$$

sottraendo membro a membro

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$$

$$\Rightarrow m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \forall x_1, x_2$$

## Rette 4

---

- **RETTA PER DUE PUNTI:** l'equazione della retta passante per due punti assegnati  $P = (x_1, y_1)$  e  $Q = (x_2, y_2)$  può essere scritta

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \quad , \quad y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1$$

- **EQUAZIONE PARAMETRICA:** consiste nell'esprimere  $x$  e  $y$  come funzioni di una variabile ausiliaria  $t$  (*parametro*)

$$\begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$

descrive il moto di un punto, che percorre una retta con velocità uniforme e che all'istante  $t = 0$  si trova in  $P_0 = (x_0, y_0)$

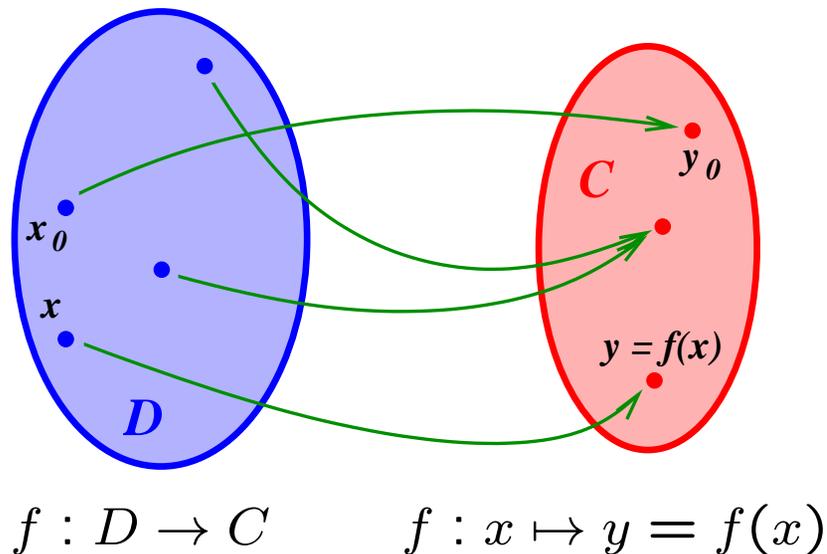
# Funzione 1

---

- il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze
- tale corrispondenza può essere data in svariati modi:
  - da un rilevamento empirico
  - da una formula (*legge*)
- ESEMPI:
  1. la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
  2. la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
  3. lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:  
 $s = \frac{1}{2} g t^2$  (*moto uniformemente accelerato*)
  4. la relazione tra i lati  $x, y$  di un rettangolo di area unitaria  
 $xy = 1$  da cui si ricava:  $y = \frac{1}{x}$

## Funzione 2 - Definizione

Una **funzione**  $f$  è una legge che ad ogni elemento  $x$  di un certo insieme  $D$  (**dominio**) fa corrispondere *uno ed un solo* elemento  $y$  di un secondo insieme  $C$  (**codominio**). Si dice che  $y$  è l'**immagine** di  $x$  tramite  $f$  e si scrive  $y = f(x)$ .



### ESEMPI:

1. **funzione costante:** ogni funzione definita sul dominio  $D$  tale che

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

2. **funzione identità:**  $id_D : D \rightarrow D$  definita da  $id_D(x) = x$

3. **successioni:** funzioni definite su  $\mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

i valori si indicano con

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

anzichè  $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$

# Grafico

---

## COORDINATE CARTESIANE

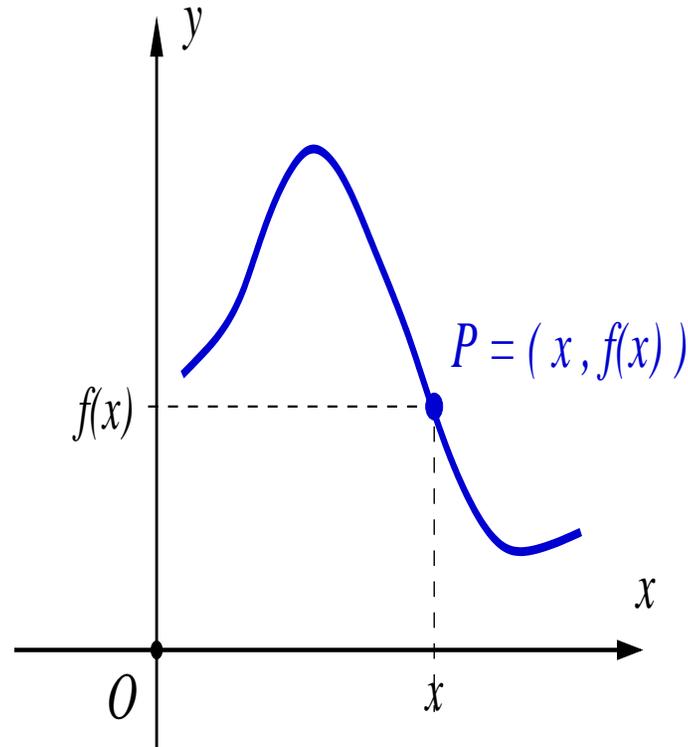
*sistemi monometrici:* stessa unità di misura sui due assi  $x, y$

*sistemi dimetrici:* unità di misura diverse sui due assi (*spesso utile nelle applicazioni*)

Sia  $y = f(x)$  una funzione reale di variabile reale

## GRAFICO DI $y = f(x)$

insieme delle coppie  $(x, f(x))$



## Funzioni - Esempi

---

- ESEMPI (*funzioni reali di una variabile reale*):

1.  $y = f(x) = 2x + 1$  ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  *retta*

2.  $y = f(x) = \frac{1}{x}$  ,  $\forall x \neq 0$  *iperbole equilatera*

3.  $y = f(x) = \sqrt{x}$  ,  $\forall x \geq 0$

4.  $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$  *funzione di Dirichlet*

- si dice che  $f(x)$  è il valore della funzione  $f$  in  $x$
- $x$  variabile *indipendente*
- $y$  variabile *dipendente*

## Funzioni Iniettive e Suriettive

---

- una funzione  $f : D \rightarrow C$  si dice **iniettiva** se elementi distinti di  $D$  hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- una funzione  $f : D \rightarrow C$  si dice **surgettiva** se ogni elemento del *codominio*  $C$  è *immagine* di qualche elemento del *dominio*.  
In simboli:

$$\forall y \in C \quad \exists x \in D / f(x) = y$$

- una funzione  $f : D \rightarrow C$  contemporaneamente iniettiva e surgettiva si dice **biunivoca**

## Funzioni Biunivoche

---

- una funzione  $f : D \rightarrow C$  si dice **BIUNIVOCA** (bigettiva) se ogni  $y \in C$  è immagine di uno ed un solo elemento  $x \in D$ .
- ESEMPI:
  1.  $D = C = \mathbb{R}$   $y = 2x + 1$  è biunivoca:  $y \in C$  è immagine di  $x = \frac{1}{2}(y - 1)$ .
  2.  $D = C = \mathbb{R}_+$   $y = \sqrt{x}$  è biunivoca:  $y \in C$  è immagine di  $x = y^2$ .
  3.  $D = \mathbb{R}_-$ ,  $C = \mathbb{R}_+$   $y = x^2$  è biunivoca:  $y \in C$  è immagine di  $x = -\sqrt{y}$ .
  4.  $D = \mathbb{R}_+$ ,  $C = \mathbb{R}$   $y = x^2$  non è biunivoca:  $\forall y < 0$  non è immagine di alcun  $x$ .
  5.  $D = \mathbb{R}$ ,  $C = \mathbb{R}_+$   $y = x^2$  non è biunivoca:  $y = 4$  è immagine di  $x = \pm 2$ .

# Insiemi di Numeri Reali

---

## INTERVALLI LIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- intervallo chiuso  $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- intervallo aperto  $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
- intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra  $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
- intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra  $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

## INTERVALLI ILLIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$       $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$       $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$

## INTORNI $x_0 \in \mathbb{R}$ , $\delta > 0$

- si dice si intorno del punto  $x_0$  di raggio  $\delta$  l'insieme:  
 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} / x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = I_\delta(x_0)$

# Operazioni sulle Funzioni

---

- OPERAZIONI ARITMETICHE:

date due funzioni  $f(x), g(x)$  a valori reali, sull'intersezione dei due domini, si possono definire:

1. *funzione somma*:  $s(x) = f(x) + g(x)$
2. *funzione differenza*:  $d(x) = f(x) - g(x)$
3. *funzione prodotto*:  $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. *funzione quoziente*:  $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  se  $g(x) \neq 0$

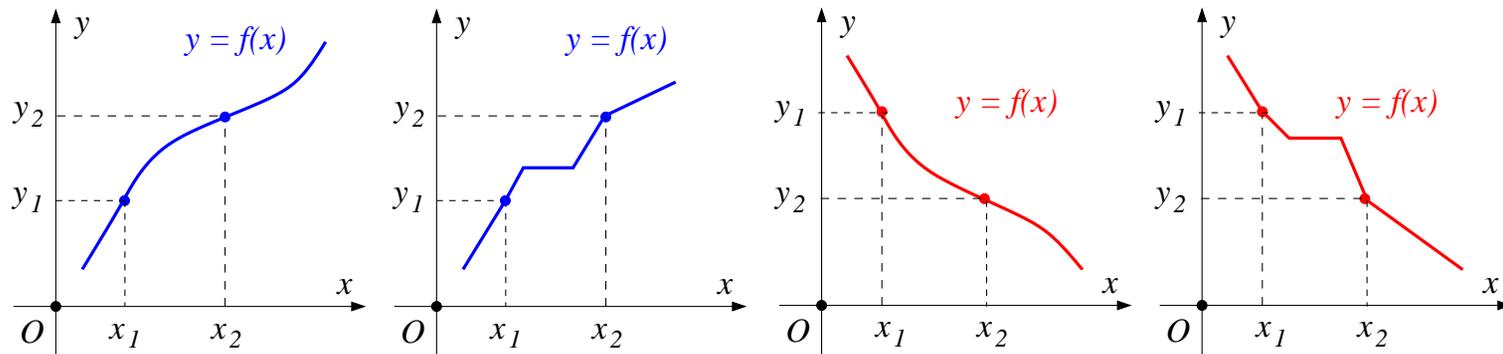
- ESEMPI:

1. *somma*:  $f(x) = x$  ,  $g(x) = 5 \Rightarrow (f + g)(x) = x + 5$
2. *prodotto*:  $f(x) = x$  ,  $g(x) = x + 5 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$
3. *quoziente*:  $f(x) = x + 3$  ,  $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$
4.  $f(x) = \sqrt{x}$  ,  $g(x) = x^2$  ,  $h(x) = x - 5 \Rightarrow \frac{f - g}{h}(x) = \frac{\sqrt{x} - x^2}{x - 5}$  qual è il dominio ?

# Funzioni Monotone 1

una funzione  $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  si dice

- **strettamente crescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ .
- **debolmente crescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ .
- **strettamente decrescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ .
- **debolmente decrescente:**  $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$ .



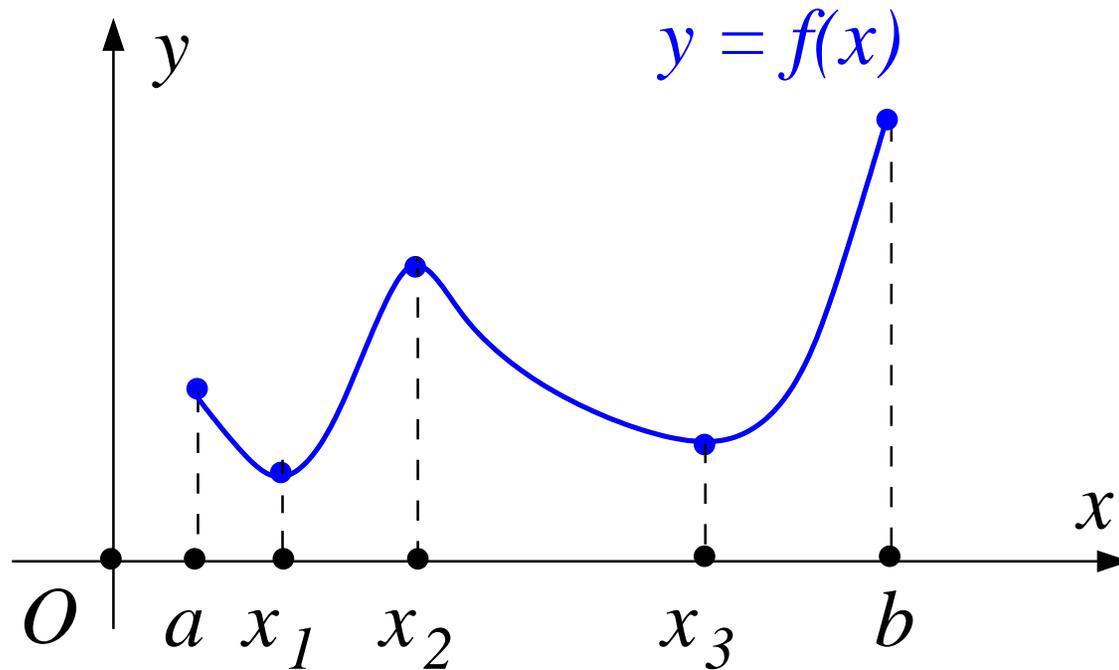
# Minimi e Massimi 1

---

- **minimo (detto anche minimo assoluto (globale)):**  
 $x_0$  è punto di minimo se  $f(x) \geq f(x_0)$ ,  $\forall x \in A$  (*dominio*)
- **massimo (detto anche massimo assoluto (globale)):**  
 $x_0$  è punto di massimo se  $f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in A$  (*dominio*)
- **minimo relativo (locale):**  
si dice che in  $x_0$  la funzione ha un punto di minimo relativo se “vicino” a  $x_0$  assume solo valori *maggiori o uguali* di  $f(x_0)$   
ovvero  
 $x_0$  è punto di minimo relativo se  $\exists \delta > 0$   
tale che  $f(x) \geq f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- **massimo relativo (locale):**  
si dice che in  $x_0$  la funzione ha un punto di massimo relativo se “vicino” a  $x_0$  assume solo valori *minori o uguali* di  $f(x_0)$   
ovvero  
 $x_0$  è punto di massimo relativo se esiste  $\delta > 0$   
tale che  $f(x) \leq f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

## Minimi e Massimi di Funzione - 2

---



- $x_1$  punto di minimo assoluto,  $f(x_1)$  valore minimo assoluto;
- $x_2$  punto di massimo relativo,  $f(x_2)$  valore massimo relativo;
- $x_3$  punto di minimo relativo,  $f(x_3)$  valore minimo relativo;
- $b$  punto di massimo assoluto,  $f(b)$  valore massimo assoluto.