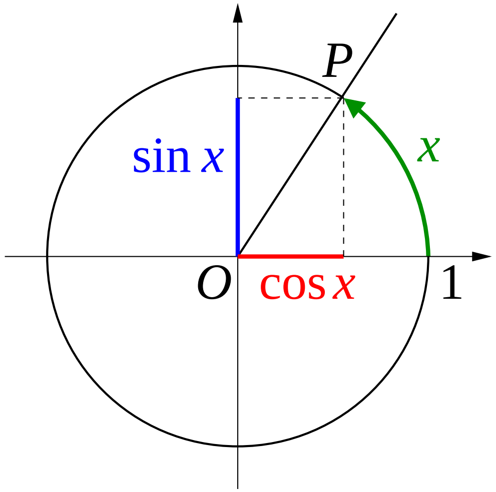
Funzioni Seno e Coseno

Circonferenza di raggio 1



Dato $x \in \mathbb{R}$ si costruisce il punto P partendo da $(1, 0)$ e percorrendo un arco di lunghezza $|x|$

- in senso *antiorario* se $x > 0$
- in senso *orario* se $x < 0$

Per definizione $P = (\cos x, \sin x)$.

Relazione fondamentale:

$$(\sin x)^2 + (\cos x)^2 = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Proprietà di $\sin x$:

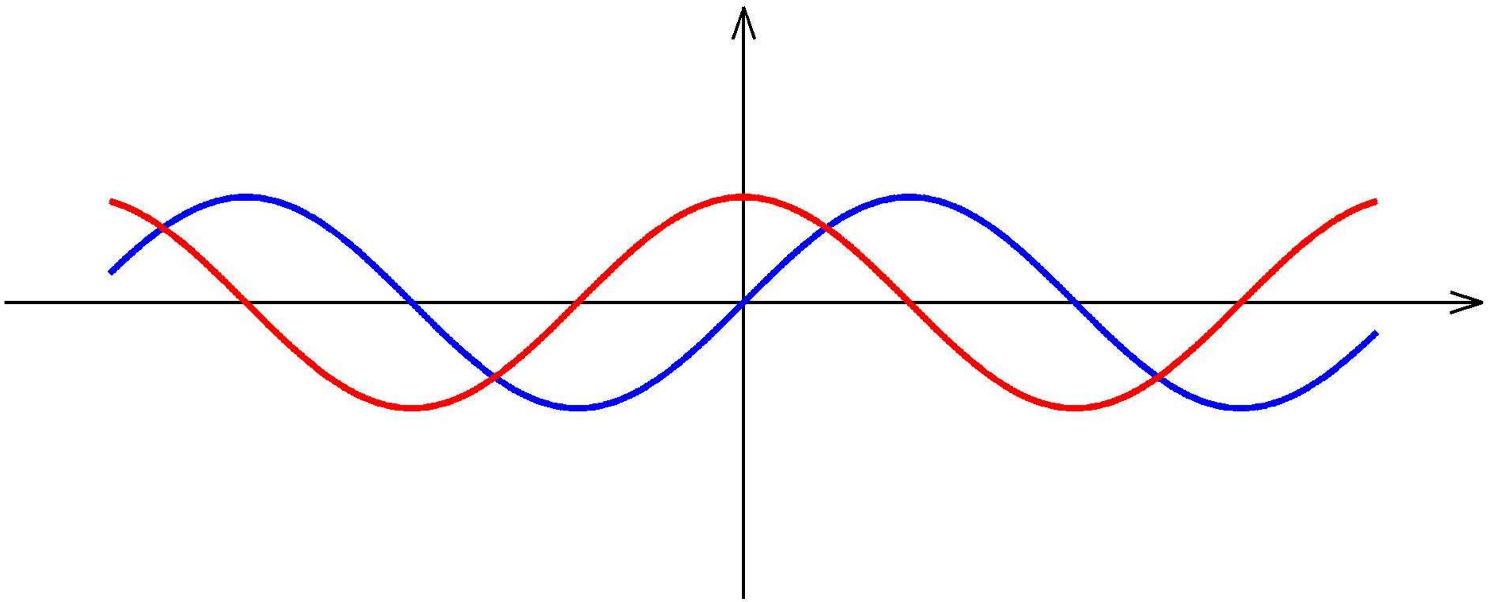
- periodica:
  $\sin(x + 2\pi) = \sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $-1 \leq \sin x \leq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\sin x > 0$ per $x \in (0, \pi)$
  $\sin x < 0$ per $x \in (\pi, 2\pi)$
- è crescente in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e in $[\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$
- è decrescente in $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$
- dispari: $\sin(-x) = -\sin x \ \forall x \in \mathbb{R}$
- alcuni valori notevoli:
  $\sin 0 = \sin \pi = \sin 2\pi = 0$
  $\sin \frac{\pi}{2} = 1, \qquad \sin \frac{3\pi}{2} = -1$

Funzioni Seno e Coseno

Dalle proprietà precedenti si ottiene il seguente grafico per $y = \sin x$.

Il grafico $y = \cos x$ si ottiene per traslazione poiché si ha

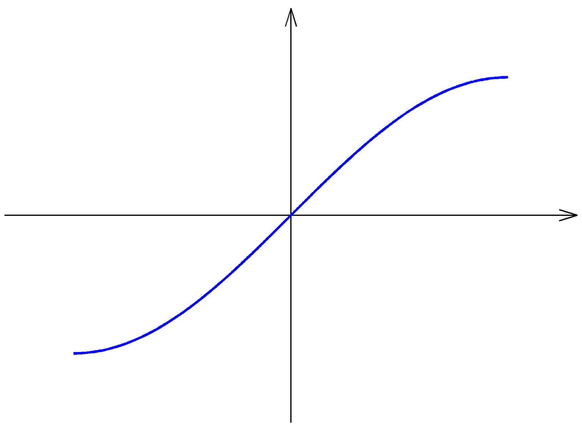
$$\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$



Funzione Arcoseno

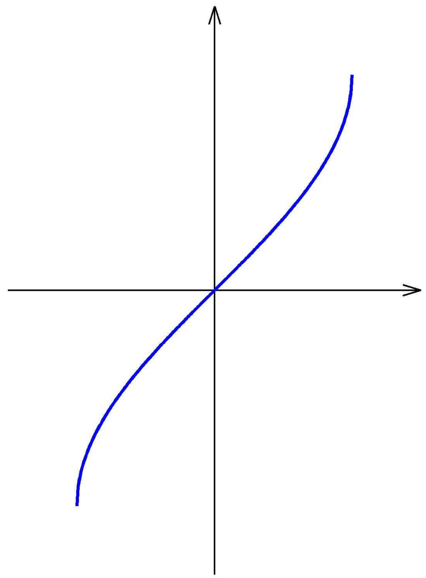
La funzione $f(x) = \sin x$ definita per $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è la sua funzione inversa.



$f : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$

$f(x) = \sin x$



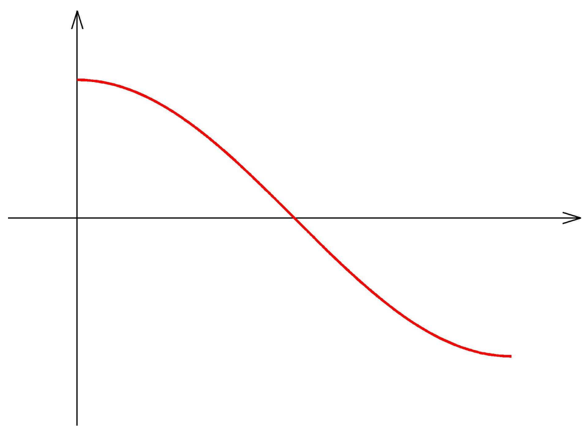
$f^{-1} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$f^{-1}(x) = \arcsin x$

Funzione Arcocoseno

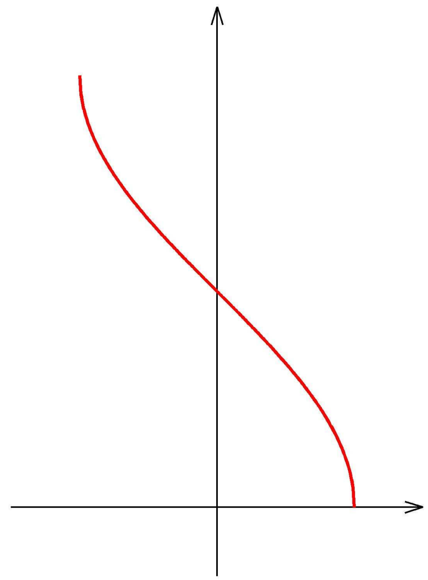
La funzione $g(x) = \cos x$ definita per $x \in [0, \pi]$ a valori in $[-1, 1]$ è biunivoca.

$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$ è la sua funzione inversa.



$g : [0, \pi] \to [-1, 1]$

$g(x) = \cos x$



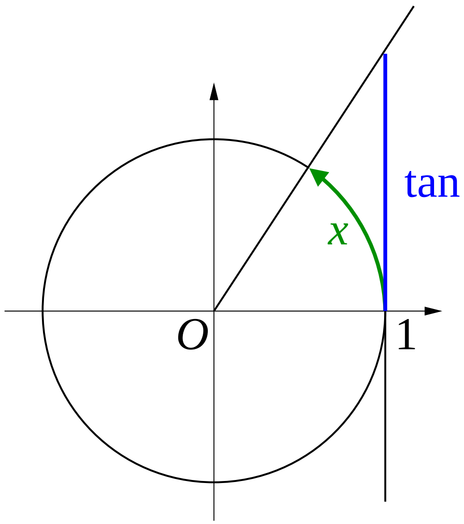
$g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$

$g^{-1}(x) = \arccos x$

Funzione Tangente

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad \text{per ogni } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

È una funzione periodica di periodo π e dispari.



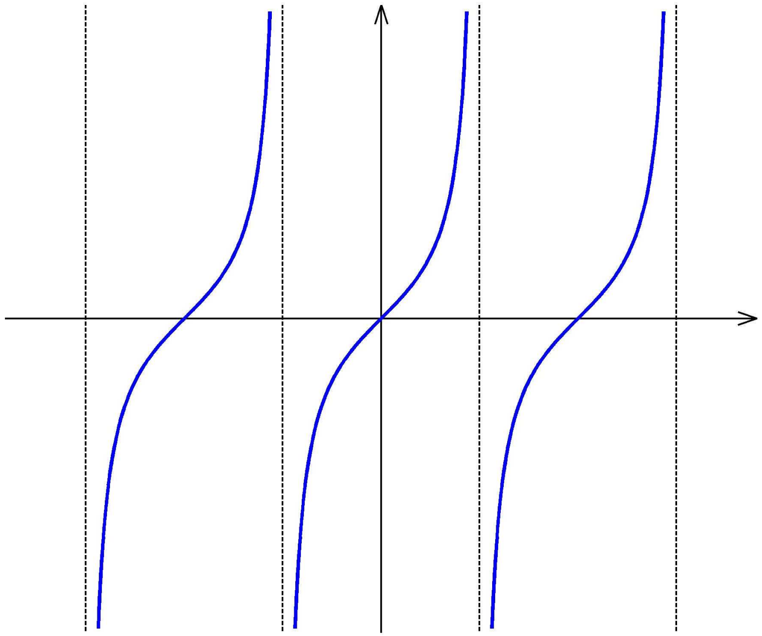
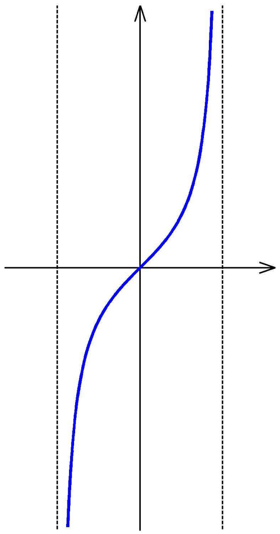


grafico di $f(x) = \tan x$

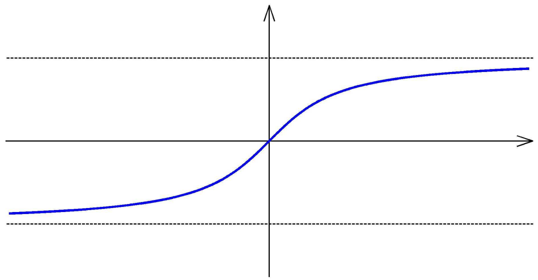
Funzione Arcotangente

La funzione $f(x) = \tan x$ definita per $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ a valori in $\mathbb{R}$ è biunivoca. $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ è la sua funzione inversa.



$f : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

$f(x) = \tan x$



$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

$f^{-1}(x) = \arctan x$

Esercizi

1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \ln(x-2)$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = e^{\ln(x-2)} = x - 2$ definita per $x > 2$.
$(g \circ f)(x) = \ln(e^x - 2)$ definita per $x > \ln 2$.

2. Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \ln x$,

(a) dire quanto vale $f \circ g$ e qual è il suo insieme di definizione;

(b) dire quanto vale $g \circ f$ e qual è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $(f \circ g)(x) = -(\ln x)^3$ definita per $x > 0$.
$(g \circ f)(x) = \ln(-x^3)$ definita per $x < 0$.

Esercizi

3. Determinare il campo di esistenza delle seguenti funzioni:

$$f(x) = \arcsin(2x+1)\,, \qquad f(x) = \sin\sqrt{x-8}$$

$$f(x) = \frac{1}{1+\cos x}\,, \qquad f(x) = \tan(\log x)\,.$$

Soluzione:

$f(x) = \arcsin(2x+1)$ ha come campo di esistenza $[-1,0]$.

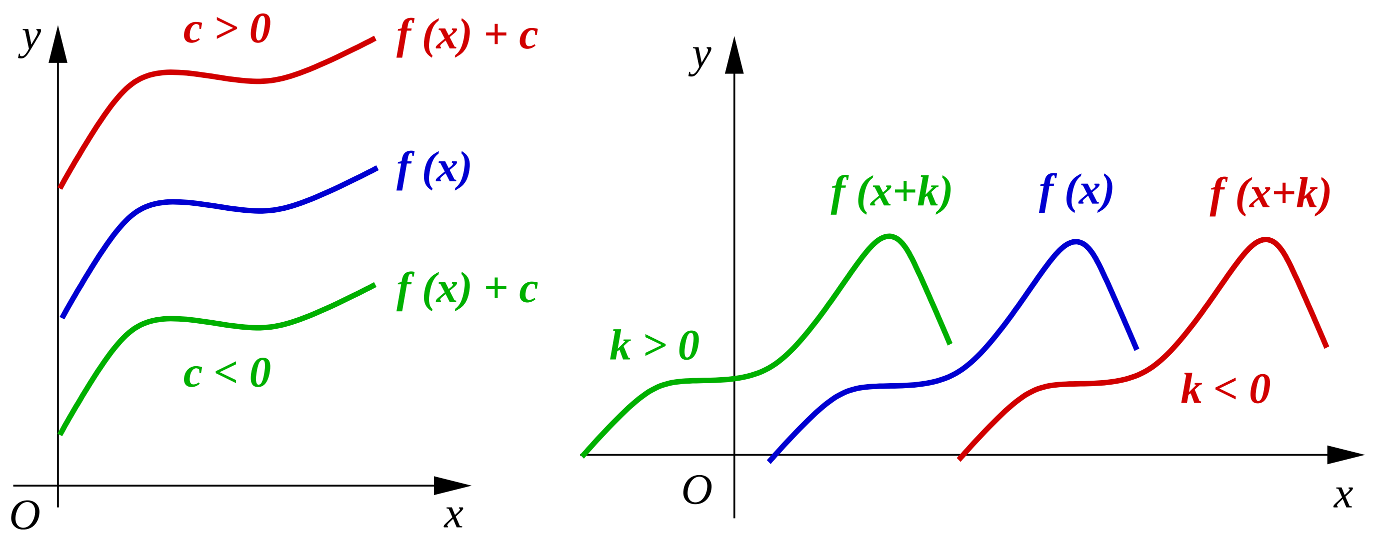
$f(x) = \sin\sqrt{x-8}$ ha come campo di esistenza $[8,+\infty)$.

$f(x) = \dfrac{1}{1+\cos x}$ ha come campo di esistenza $\mathbb{R} - \{\pi + 2k\pi : \; k \in \mathbb{Z}\}$.

$f(x) = \tan(\log x)$ ha come campo di esistenza

$$(0,+\infty) - \{10^{\frac{\pi}{2}+k\pi} : \; k \in \mathbb{Z}\}.$$

Traslazioni



TRASLAZIONI VERTICALI:

$y = f(x) + c$ traslazione verticale verso l'alto se $c > 0$, verso il basso se $c < 0$

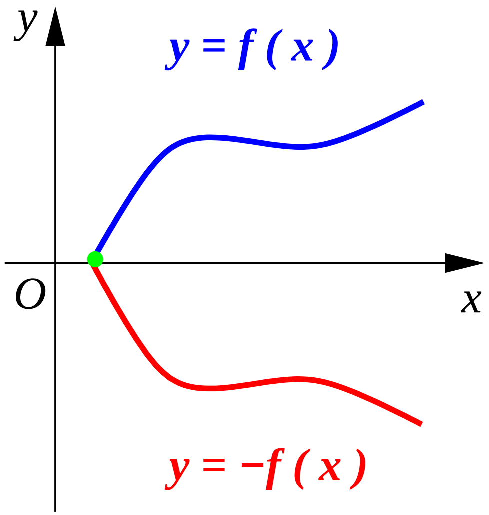
TRASLAZIONI ORIZZONTALI:

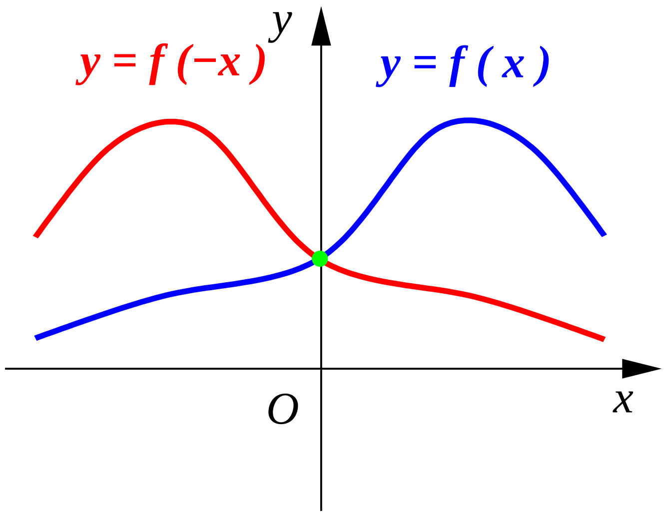
$y = f(x + k)$ traslazione orizzontale verso sinistra se $k > 0$, verso destra se $k < 0$

Esercizio: disegnare il grafico delle funzioni $y = 1 + \log x$, $y = |x| - 3$, $y = e^x + 1$,

$y = x^3 - 8$, $y = \log(x - 1)$, $y = |x + 2|$, $y = (x - 2)^3$, $y = \dfrac{1}{x - 1}$, $y = e^{x+3}$

Riflessioni





RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE x:

$y = -f(x)$ i punti di intersezioni con l'asse x restano invariati

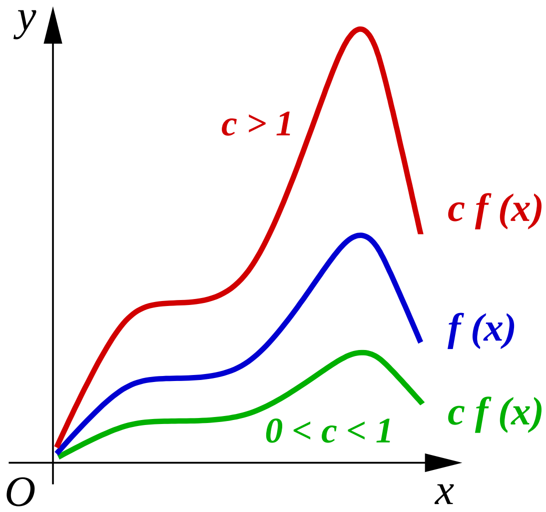
Esercizio: disegnare il grafico di $y = -|x|\,,\quad y = -\dfrac{1}{x}\,,\quad y = \log\dfrac{1}{x} = -\log x$

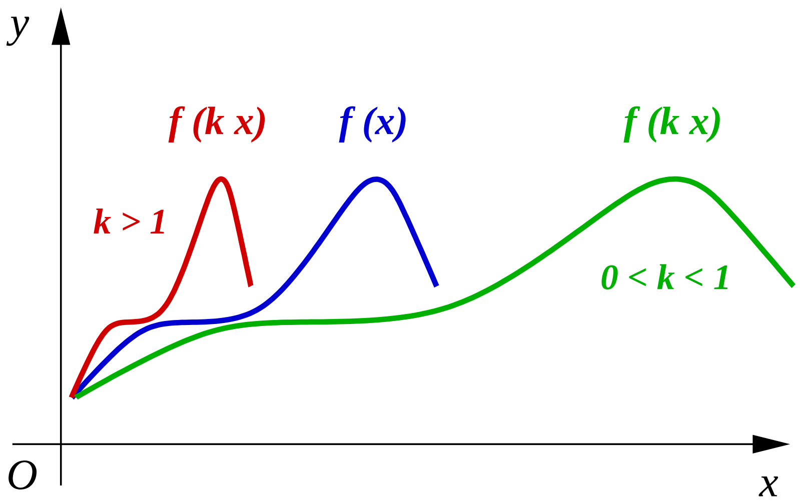
RIFLESSIONE RISPETTO ALL'ASSE y:

$y = f(-x)$ i punti di intersezioni con l'asse y restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = e^{-x}\,,\quad y = \sqrt{-x}\,,\quad y = (-x+1)^3$

Dilatazioni





CAMBIO DI SCALA SULL'ASSE y:

$y = c \cdot f(x)$ compressione per $0 < c < 1$, dilatazione per $c > 1$

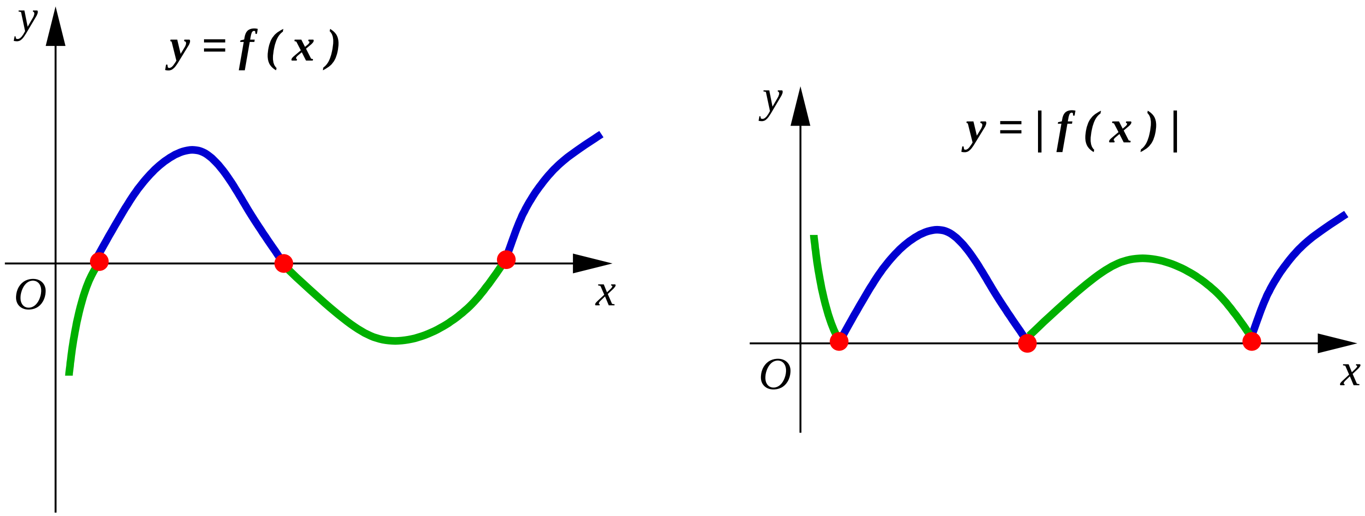
Esercizio: disegnare il grafico di $y = \frac{1}{2}x\,,\quad y = \log x^3 = 3\log x\,,\quad y = 5\,e^x$

CAMBIO DI SCALA SULL'ASSE x:

$y = f(k \cdot x)$ dilatazione per $0 < k < 1$, compressione per $k > 1$

Esercizio: disegnare il grafico di $y = \frac{1}{3}x\,,\quad y = \sqrt{2\,x}\,,\quad y = e^{2\,x}$

Valore Assoluto



$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \qquad \text{(riflessione)} \end{cases}$$

NOTA: gli zeri della funzione restano invariati

Esercizio: disegnare il grafico di $y = |2x + 1|$, $y = |x^3|$, $y = |\log x|$