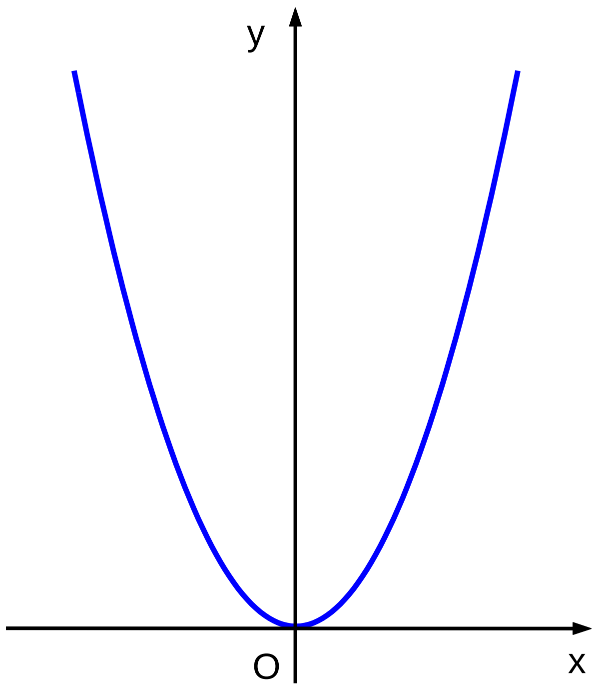
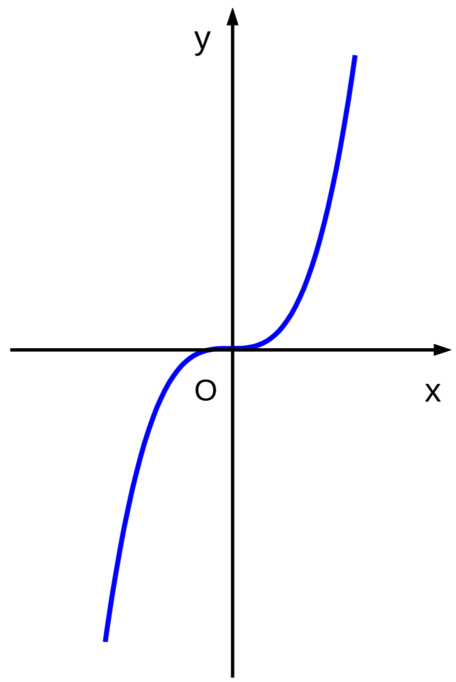
Potenze con Esponente Intero Positivo



$$y = f(x) = x^2$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ funzione pari



$$y = g(x) = x^3$$

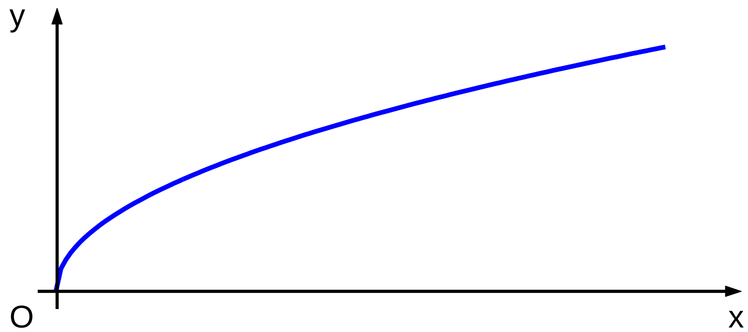
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funzione dispari

Il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è *pari* o a quello di x^3 se n è *dispari*.

Radici

Consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$.

- Se $n = 1$, la funzione $f(x) = x$ è l'*identità*, con inversa uguale a se stessa.
- Se $n = 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ NON è invertibile, ma lo è da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$. Chiamiamo *radice quadrata* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

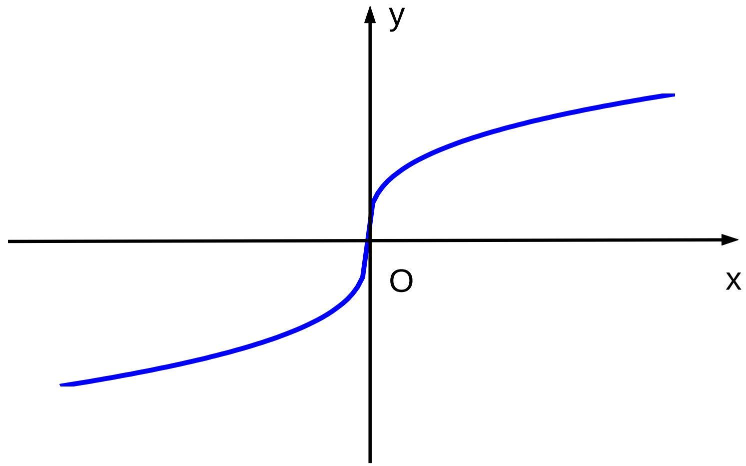


$y = \sqrt{x}$

In generale, se n è *pari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$. Chiamiamo l'inversa *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}_+$.

Radici

- Se $n = 3$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$ è *invertibile*.
  Chiamiamo *radice cubica* la sua inversa $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$.



$y = \sqrt[3]{x}$

In generale, se n è *dispari*, la funzione $f(x) = x^n$ è invertibile da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.
Chiamiamo *radice n-sima* $\sqrt[n]{x}$ definita da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Funzioni Potenza

POTENZE AD ESPONENTE INTERO:

- se $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;
- se l'esponente è un intero negativo,

$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \qquad \text{definita per ogni } x \neq 0.$$

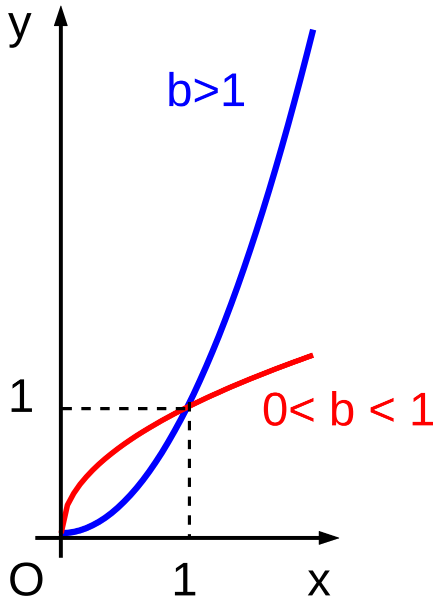
POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE: per $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

$$f(x) = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} \qquad \text{definita per ogni } x > 0.$$

POTENZE AD ESPONENTE REALE: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*: $b \in \mathbb{R}$

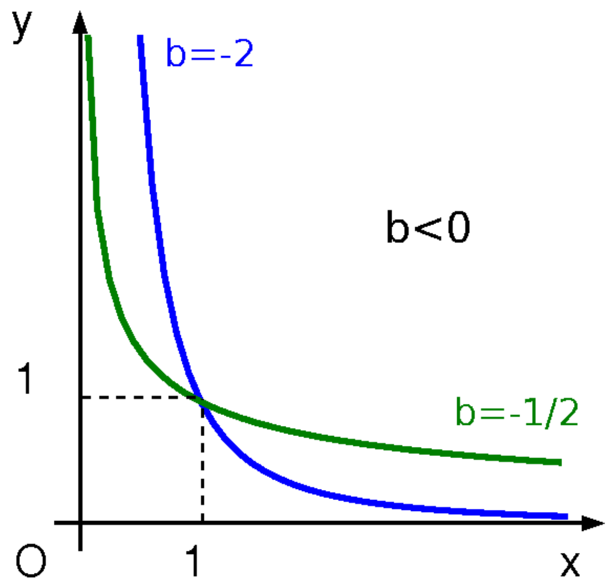
$$f(x) = x^b \qquad \text{definita per ogni } x > 0 \qquad (\text{resta indefinito } 0^0 \text{ !!!})$$

Grafico di $f(x) = x^b$ con $b \in \mathbb{R}$



$y = f(x) = x^b$ per $b > 0$

$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$



$y = f(x) = x^b$ per $b < 0$

$f : (0, +\infty) \to (0, +\infty)$

Ancora sulle Potenze

POLINOMI: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono i *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_n\, x^n.$$

P_n è detto polinomio di grado n.

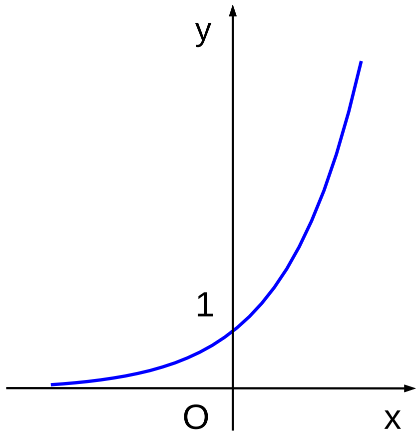
FUNZIONI RAZIONALI: facendo il quoziente di due polinomi P e Q si ottengono le *funzioni razionali*, del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{definita su } \{x \in \mathbb{R} : \ Q(x) \neq 0\}.$$

Come caso particolare ritroviamo le funzioni potenza con esponente intero:

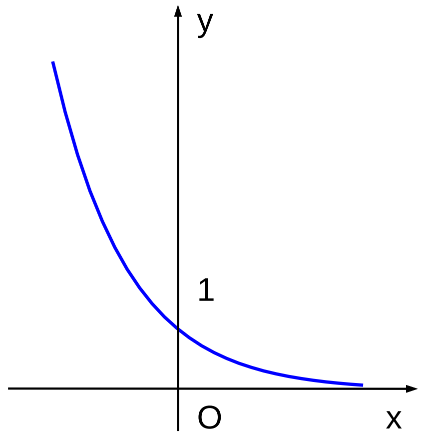
$$f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad \text{definita su } \mathbb{R} - \{0\}.$$

Funzione Esponenziale



$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $a > 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente crescente:*
  $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a 0



$f : \mathbb{R} \to (0, +\infty),\ f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$

- $a^0 = 1,\ \ a^1 = a$
- $a^x > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$
- *strettamente decrescente*:
  $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$
- se x tende a $+\infty$, a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$, a^x tende a $+\infty$

PROPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

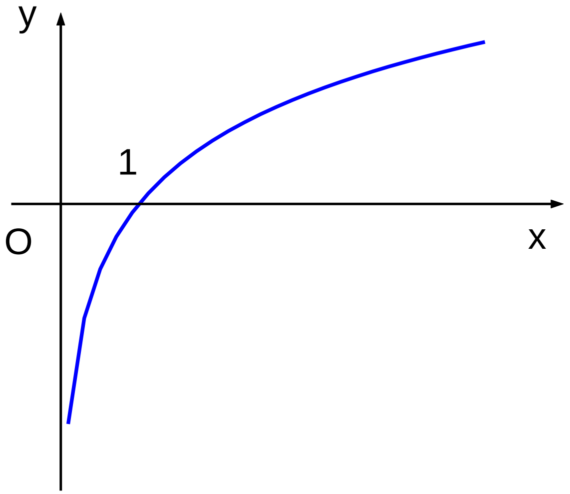
$$a^x a^y = a^{x+y} \quad \text{(prodotto)}, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad \text{(composizione)}, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad \text{(reciproco)}.$$

Funzione Logaritmo

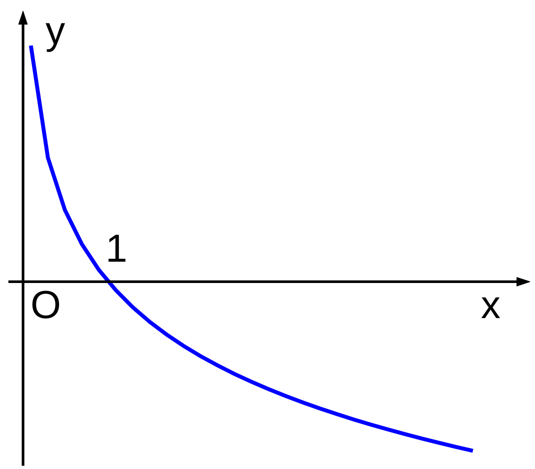
La funzione esponenziale $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, $f(x) = a^x$ è strettamente monotona e surgettiva, quindi invertibile.

$$f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}, \; f^{-1}(x) = \log_a x \qquad \text{logaritmo in base } a \text{ di } x$$

$$\log_a x = y \;\Leftrightarrow\; a^y = x$$



$y = \log_a x$ con $a > 1$



$y = \log_a x$ con $0 < a < 1$

Proprietà del Logaritmo

Il logaritmo $\log_a x$ è l'esponente a cui bisogna elevare la base a per ottenere x.

- $a^{\log_a x} = x$ per ogni $x > 0$
- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1$
- $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2 \qquad$ per ogni $x_1, x_2 > 0$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x \qquad$ per ogni $x > 0$ e $b \in \mathbb{R}$
- cambio di base: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \qquad$ per ogni $x > 0$ e $a, b > 0$

Esercizi

1. Sapendo che $\log_{10} 2 \simeq 0,30103$ e che $\log_{10} e \simeq 0,43429$, calcolare i valori di $\log_{10} 8$, $\log_{10} 5$, $\log_e 2$, $\log_e \frac{1}{2}$.

Soluzione: basta notare che

$$\log_{10} 8 = \log_{10} 2^3 = 3 \log_{10} 2,$$

$$\log_{10} 5 = \log_{10} \frac{10}{2} = \log_{10} 10 - \log_{10} 2 = 1 - \log_{10} 2,$$

$$\log_e 2 = \frac{\log_{10} 2}{\log_{10} e}, \qquad \log_e \frac{1}{2} = \log_e 2^{-1} = -\log_e 2.$$

2. Determinare le costanti α e β in modo che il grafico della funzione $f(x) = \alpha\, e^{\beta\, x}$ passi per i punti $(0, 5)$ e $(4, 15)$.

Soluzione: poiché $f(0) = \alpha$, si ha immediatamente che $\alpha = 5$. Si ottiene quindi che $f(4) = 5e^{4\beta} = 15$, da cui $e^{4\beta} = 3$, cioè $\beta = \frac{1}{4} \log_e 3$.

Esercizi

3. Determinare l'insieme dei valori di x per cui risulta $\log(2x+3) < 1$.

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $2x+3>0$. Inoltre, per la stretta monotonia dell'esponenziale la condizione $\log(2x+3)<1$ è equivalente a $2x+3<10$.

Pertanto, l'insieme cercato è $(-\frac{3}{2}, \frac{7}{2})$.

4. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \log(x^2 - 5x + 6).$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2-5x+6>0$, quindi il campo di esistenza è $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$.

5. Determinare il campo di esistenza della funzione

$$f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 5x + 7)}.$$

Soluzione: l'argomento del logaritmo deve essere positivo, cioè $x^2 - 5x + 7 > 0$. L'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $\log(x^2 - 5x + 7) \geq 0$, quindi $x^2 - 5x + 7 \geq 1$.

La seconda condizione contiene anche la prima. Quindi, il campo di esistenza è $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

6. Determinare il campo di esistenza della funzione $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$.

Soluzione: l'argomento della radice quadrata deve essere non negativo, cioè $e^x - 1 \geq 0$ e quindi $x \geq 0$. Il campo di esistenza è $[0, +\infty)$.