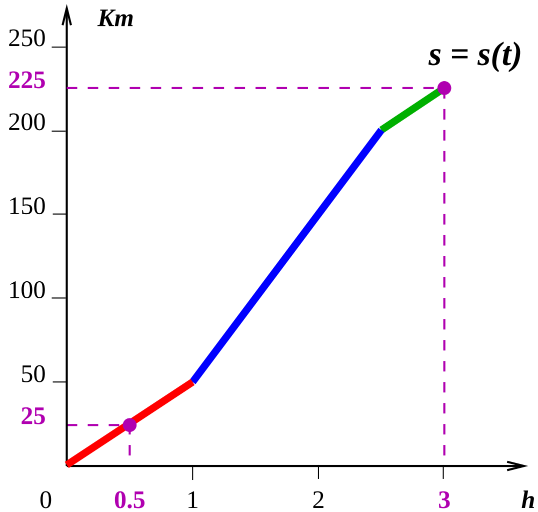
Velocità



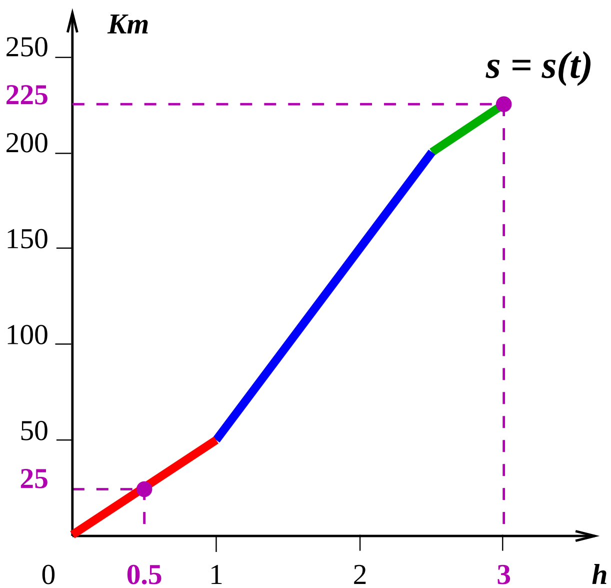
VELOCITÀ MEDIA:

VELOCITÀ ISTANTANEA:

Velocità 1

MOTO RETTILINEO UNIFORME:

$s(t) = s_0 + v \cdot (t - t_0)$



LEGGE DI MOTO:

$$s(t) = \begin{cases} 50\ t & \text{per } t \in [\ 0, 1\ ] \\ 50 + 100\ (t-1) & \text{per } t \in (1, 2.5\ ) \\ 200 + 50\ (t - 2.5) & \text{per } t \geq 2.5 \end{cases}$$

VELOCITÀ MEDIA:

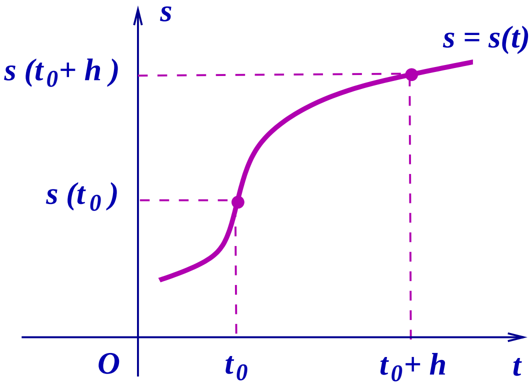
$$v_{media} = \frac{s(3) - s(0.5)}{3 - 0.5} = \frac{200}{2.5} = 80\ km/h.$$

velocità media sull'intervallo $[\ 0.5, 3\ ]$

VELOCITÀ ISTANTANEA:

- per $t = 0.5$ $\quad v_{istantanea} = \ 50\ km/h$
- per $t = 2$ $\quad v_{istantanea} = 100\ km/h$
- per $t = 3$ $\quad v_{istantanea} = \ 50\ km/h.$

Velocità 2



più h è vicino a 0 , più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e piú precisa l'informazione sull' andamento della velocità.

- VELOCITÀ MEDIA:

$$v_{media} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità media sull'intervallo $[\ t_0, t_0 + h\ ]$.

- VELOCITÀ ISTANTANEA:

$$v_{istantanea} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità all'istante t_0.

- ESEMPIO:
sia $s(t) = s_0 + v\ t$ allora si ha:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v\ h}{h} = v$$

Derivabilità e Continuità

- **DERIVABILITÀ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ**

  se f è derivabile in x_0 allora risulta continua in x_0.

  Per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, passando al limite nell'uguaglianza

  $$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

  si ricava la continuità in x_0

  $$\lim_{x \to x_o} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ**

  1. $y = |x|$ *(punto angoloso)*
  2. $y = \sqrt[3]{x^2}$ *(punto cuspidale)*

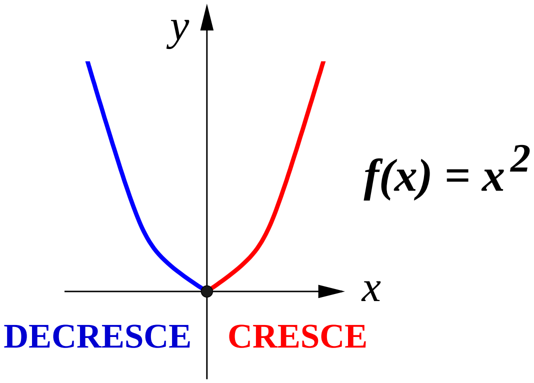
  tutte queste funzioni risultano continue, ma non derivabili, in $x = 0$.

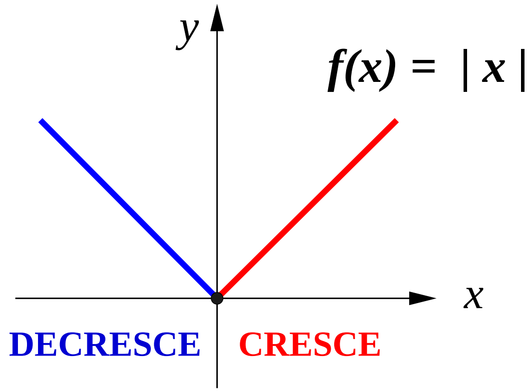
- CRITERIO DI MONOTONIA:
  se $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile in $(a,\ b)$, si ha:
  $$f'(x) \geq 0 \ \ \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \ \ \textit{debolmente crescente in}\ (a,\ b)$$
  $$f'(x) \leq 0 \ \ \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \ \ \textit{debolmente decrescente in}\ (a,\ b)$$

- NOTA: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:
  $$f'(x) > 0 \ \ \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \ \ \textit{strettamente crescente in}\ (a,\ b)$$
  $$f'(x) < 0 \ \ \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \ \ \textit{strettamente decrescente in}\ (a,\ b)$$
  non valgono le implicazioni inverse, basta considerare $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

- ESEMPI: determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti.
  1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata: $f'(x) = 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
     si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$.
  2. $g(x) = (x^2 - 3)e^x$. Si ha: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ *oppure* $x \geq 1$
     quindi: $f(x)$ è decrescente per $x \in (-3,\ 1)$ ed è crescente per $x \notin [-3,\ 1]$.

Criterio di Monotonia 2





- $x < 0 \qquad f'(x) = 2x < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0 \qquad f'(x) = 2x > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0 \quad f'(0) = 0$
  punto di minimo relativo

- $x < 0 \qquad f'(x) = -1 < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0 \qquad f'(x) = +1 > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0 \qquad \nexists f'(0)$
  punto di minimo relativo

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI. Sia $f : A \to \mathbb{R}$:

- x_0 si dice *punto di massimo assoluto* se $f(x_0) \geq f(x)$, *per ogni* $x \in A$
- x_0 si dice *punto di minimo assoluto* se $f(x_0) \leq f(x)$, *per ogni* $x \in A$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. Sia f una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato* $[a,\ b]$, allora esitono il massimo ed il minimo assoluti di f in $[a,\ b]$.

CONTROESEMPI: osserviamo che le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ *per* $x \in [-1,\ 1]$ e non ha minimo. La funzione non è *continua*.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *per* $x \in (0,\ 1]$ non ha massimo. L'intervallo non è *chiuso*.
3. $f(x) = e^x$ *per* $x \in (-\infty,\ 0]$ non ha minimo. L'intervallo non è *limitato*.

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALI (RELATIVI). Sia $f : A \to \mathbb{R}$:

- x_0 si dice *punto di massimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \leq f(x_0) \ , \quad per\ ogni\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
- x_0 si dice *punto di minimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \geq f(x_0) \ , \quad per\ ogni\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

TEOREMA DEI PUNTI CRITICI (FERMAT). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a,\ b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in (a,\ b)$ e se f è *derivabile* in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

PUNTI CRITICI. I punti x_0 in cui si annulla la derivata prima, tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo locali interni, si dicono *stazionari* o *critici.*

CRITERIO DELLA DERIVATA SECONDA. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo $(a,\ b)$ e sia x_0 un *punto critico*:

1. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale
2. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale.

Funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato

1. Vedere se la funzione è continua e trovare gli eventuali punti di discontinuità;
2. Vedere se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile;
3. Se la funzione è continua essa ha certamente massimi e minimi (vedi teorema di Weierstrass);
4. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
   - estremi dell'intervallo: a, b;
   - valori $z \in]a, b[$ in cui la funzione non è derivabile, indichiamo con $A = \{z \ : \ \nexists f'(z)\}$;
   - valori $\bar{x} \in]a, b[$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$, indichiamo con $B = \{\bar{x} \ : f'(\bar{x}) = 0\}$

- Il valore massimo (assoluto) è il massimo di questo insieme:
  $\{f(a), f(b), f(z), f(\bar{x}) \quad | \, z \in A, \ \bar{x} \in B\}$
- I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ vale il valore massimo.
- Il valore massimo è unico
- I punti di massimo non sono necessariamente unici