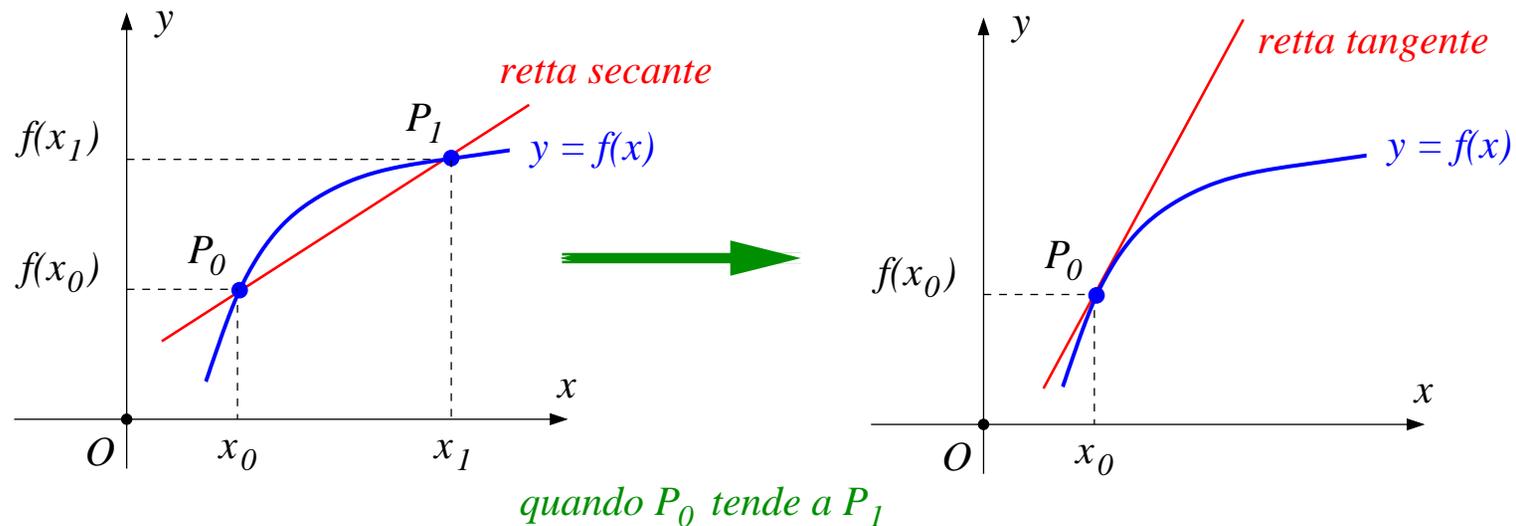


Retta Tangente 1



- consideriamo una funzione continua $y = f(x)$ e siano $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ due punti appartenenti al grafico della funzione;
- al tendere di x_1 a x_0 il punto P_1 si avvicina al punto P_0 e la **retta secante** tende ad assumere una posizione limite che prende il nome di **retta tangente** al grafico nel punto P_0 .

Retta Tangente 2



- l'equazione della **retta secante** per i due punti P_0 , P_1 è data da:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} (x - x_0) + f(x_0)$$

- l'espressione del **coefficiente angolare**

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

si chiama **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ nel punto x_0

- se esiste finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

rappresenta il coefficiente angolare della **retta tangente** di equazione:

$$y = f'(x_0) (x - x_0) + f(x_0)$$

- il limite $f'(x_0)$ è per definizione **la derivata prima** di $f(x)$ in x_0

Derivate - Definizione



- se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

la funzione $y = f(x)$ si dice **DERIVABILE** in x_0

- il valore del limite è per definizione la **DERIVATA** di $y = f(x)$ nel punto x_0
- la derivata si indica con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) , y'(x_0) , \frac{d f}{d x}(x_0) , \frac{d y}{d x}(x_0) , Df(x_0).$$

- nel lucido precedente $\Delta x = x_1 - x_0$ e $x_1 = x_0 + \Delta x$

Derivate - Esempi



ESEMPIO 1: $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$$

ESEMPIO 2: $f(x) = m x + q$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m(x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{m h}{h} = m$$

ESEMPIO 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2xh}{h} = 2x$$

Derivate - Operazioni



siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni *derivabili* e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- **PRODOTTO PER UNA COSTANTE:**

$$(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$$

- **SOMMA:**

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

- **PRODOTTO:**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- **QUOZIENTE:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Derivata - Operazioni



1. $y = x^3 = x \cdot x^2; \quad y' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$

2. iterando il procedimento se $y = x^n$ si ha $y' = n x^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

3. $y = 5x^3 - 3x^2 + 10x - 7; \quad y' = 15x^2 - 6x + 10$

4. $y = x^2 + e^x; \quad y' = 2x + e^x$

5. $y = \log_e x \sqrt{x}; \quad y' = \frac{1}{x} \sqrt{x} + \log_e x \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $y = \frac{1}{x} \quad y' = \frac{0x - 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$

7. iterando il procedimento se $y = \frac{1}{x^n}$ si ha $y' = -\frac{n}{x^{n+1}}$

8. $y = \frac{x^5 + 2}{e^x}; \quad y' = \frac{5x^4 e^x - (x^5 + 2) e^x}{(e^x)^2}$

Derivata della Funzione Composta



DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

se g è una funzione derivabile in x e f una funzione derivabile in $g(x)$ allora:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

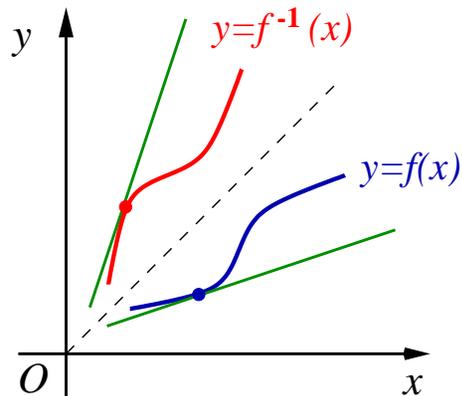
ESEMPI:

$$1. \quad y = \sqrt{x^4 + 5x^3 + 1} \quad y' = \frac{1}{2\sqrt{x^4 + 5x^3 + 1}} (4x^3 + 15x^2).$$

$$2. \quad y = (8x^3 - 6x^2)^{10} \quad y' = 10(8x^3 - 6x^2)^9 (24x^2 - 12x).$$

$$3. \quad y = e^{\sqrt{x+2}} \quad y' = -\frac{1}{2\sqrt{x+2}} e^{\sqrt{x+2}}.$$

Derivata della Funzione Inversa



- i grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.
- le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

- consideriamo una funzione $x = f(y)$ invertibile e derivabile con $f'(y) \neq 0$ (senza punti a tangente orizzontale)
- la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ risulta derivabile e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{d f^{-1}}{d x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\left[\frac{d f^{-1}}{d x} \right]_x = \frac{1}{\left[\frac{d f}{d y} \right]_{y=f^{-1}(x)}}$$

Derivata della Funzione Inversa - Esercizi



ESERCIZIO 1 - $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $x = f(y) = y^2$

$$\left[\frac{d \sqrt{x}}{d x} \right]_x = \frac{1}{\left[\frac{d y^2}{d y} \right]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{[2y]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 2 - $y = f^{-1}(x) = \log x$, $x = f(y) = e^y$

$$\left[\frac{d \log x}{d x} \right]_x = \frac{1}{\left[\frac{d e^y}{d y} \right]_{y=\log x}} = \frac{1}{[e^y]_{y=\log x}} = \frac{1}{x}$$

Derivabilità e Continuità



- **DERIVABILITÀ \Rightarrow CONTINUITÀ**

se f è derivabile in x_0 allora risulta continua in x_0 .

Per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$, passando al limite nell'uguaglianza

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

si ricava la continuità in x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **CONTINUITÀ \nRightarrow DERIVABILITÀ**

1. $y = |x|$ (punto angoloso)

2. $y = \sqrt[3]{x^2}$ (punto cuspidale)

3. $y = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$

tutte queste funzioni risultano continue, ma non derivabili, in $x = 0$.