
Funzione 1



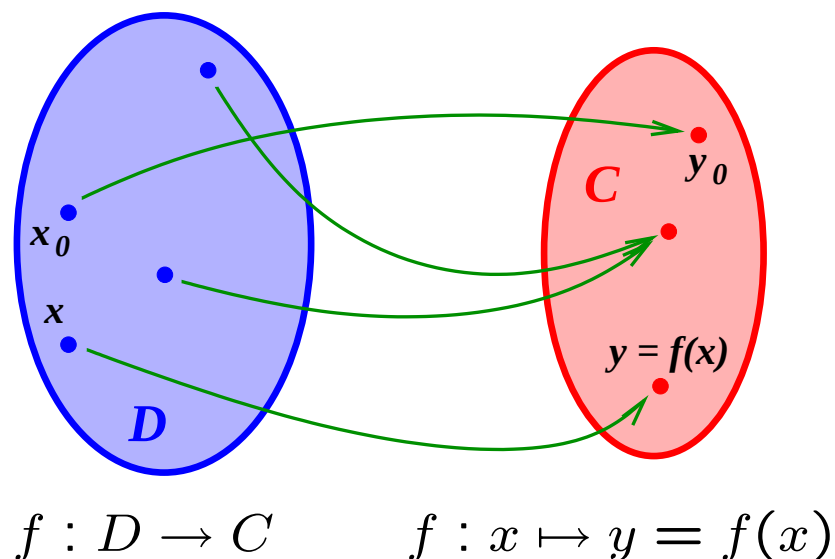
- il concetto di funzione nasce da quello di corrispondenza fra grandezze
- tale corrispondenza può essere data in svariati modi:
 - da un rilevamento empirico
 - da una formula (*legge*)
- ESEMPI:
 1. la temperatura in un certo luogo in un dato intervallo di tempo
 2. la quotazione giornaliera del Dollaro in Euro in un dato periodo
 3. lo spazio percorso nel tempo da un corpo in caduta libera:
 $s = \frac{1}{2} g t^2$ (*moto uniformemente accelerato*)
 4. la relazione tra i lati x , y di un rettangolo di area unitaria
 $xy = 1$ da cui si ricava: $y = \frac{1}{x}$

Funzione 2 - Definizione



Una **funzione** f è una legge che ad ogni elemento x di un certo insieme D (**dominio**) fa corrispondere *uno ed un solo* elemento y di un secondo insieme C (**codominio**). Si dice che y è l'**immagine** di x tramite f e si scrive $y = f(x)$.

ESEMPI:



1. **funzione costante:** ogni funzione definita sul dominio D tale che

$$f(x_1) = f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in D$$

2. **funzione identità:** $id_D : D \rightarrow D$ definita da $id_D(x) = x$

3. **successioni:** funzioni definite su $\mathbb{N}$

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

i valori si indicano con

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

anzichè $f(1), f(2), \dots, f(n), \dots$



COORDINATE CARTESIANE

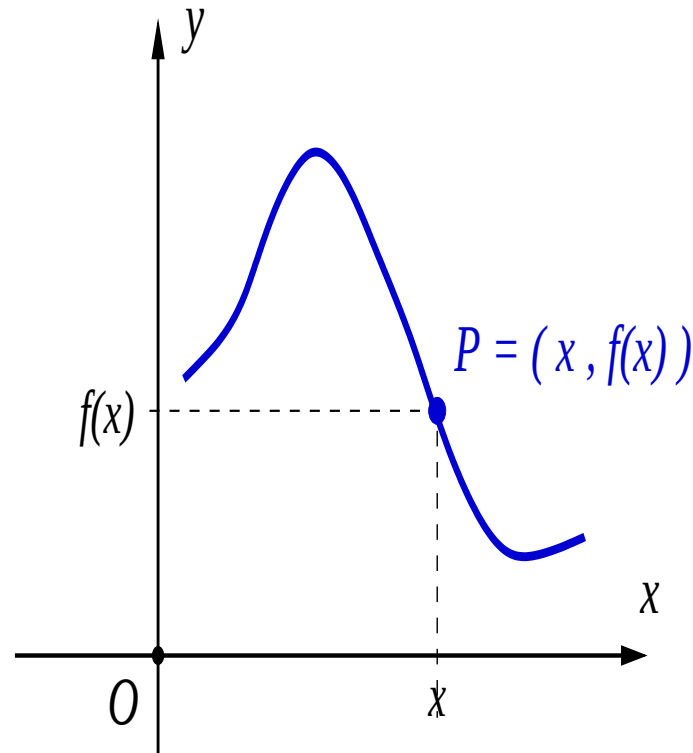
sistemi monometrici: stessa unità di misura sui due assi x, y

sistemi dimetrici: unità di misura diverse sui due assi (*spesso utile nelle applicazioni*)

Sia $y = f(x)$ una funzione reale di variabile reale

GRAFICO DI $y = f(x)$

insieme delle coppie $(x, f(x))$



Funzioni - Esempi



- ESEMPI (*funzioni reali di una variabile reale*):

1. $y = f(x) = 2x + 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ *retta*

2. $y = f(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x \neq 0$ *iperbole equilatera*

3. $y = f(x) = \sqrt{x}$, $\forall x \geq 0$

4. $y = f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{per } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ *funzione di Dirichlet*

- si dice che $f(x)$ è il valore della funzione f in x
- x variabile *indipendente*
- y variabile *dipendente*

Funzioni Iniettive e Suriettive



- una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **iniettiva** se elementi distinti di D hanno immagini distinte:

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

o, equivalentemente:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

- una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **surgettiva** se ogni elemento del *codominio* C è *immagine* di qualche elemento del *dominio*.
In simboli:

$$\forall y \in C \quad \exists x \in D / f(x) = y$$

- una funzione $f : D \rightarrow C$ contemporaneamente iniettiva e surgettiva si dice **biunivoca**

Funzioni Biunivoche



- una funzione $f : D \rightarrow C$ si dice **BIUNIVOCA** (bigettiva) se ogni $y \in C$ è *immagine di uno ed un solo elemento* $x \in D$.
- ESEMPI:
 1. $D = C = \mathbb{R}$ $y = 2x + 1$ è biunivoca: $y \in C$ è immagine di $x = \frac{1}{2}(y - 1)$.
 2. $D = C = \mathbb{R}_+$ $y = \sqrt{x}$ è biunivoca: $y \in C$ è immagine di $x = y^2$.
 3. $D = \mathbb{R}_-$, $C = \mathbb{R}_+$ $y = x^2$ è biunivoca: $y \in C$ è immagine di $x = -\sqrt{y}$.
 4. $D = \mathbb{R}_+$, $C = \mathbb{R}$ $y = x^2$ non è biunivoca: $\forall y < 0$ non è immagine di alcun x .
 5. $D = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}_+$ $y = x^2$ non è biunivoca: $y = 4$ è immagine di $x = \pm 2$.

Insiemi di Numeri Reali



INTERVALLI LIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- intervallo chiuso $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$
- intervallo aperto $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$
- intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x < b\}$
- intervallo chiuso a destra e aperto a sinistra $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$

INTERVALLI ILLIMITATI $a, b \in \mathbb{R}$

- $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$ $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq b\}$
- $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$ $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} / x < b\}$
- $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\}$
- $\mathbb{R}_- = (-\infty, 0] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 0\}$

INTORNI $x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$

- si dice si intorno del punto x_0 di raggio δ l'insieme:
$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) = \{x \in \mathbb{R} / x_0 - \delta < x < x_0 + \delta\} = I_\delta(x_0)$$

Operazioni sulle Funzioni



- OPERAZIONI ARITMETICHE:

date due funzioni $f(x), g(x)$ a valori reali, sull'intersezione dei due domini, si possono definire:

1. *funzione somma*: $s(x) = f(x) + g(x)$
2. *funzione differenza*: $d(x) = f(x) - g(x)$
3. *funzione prodotto*: $p(x) = f(x) \cdot g(x)$
4. *funzione quoziente*: $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ se $g(x) \neq 0$

- ESEMPI:

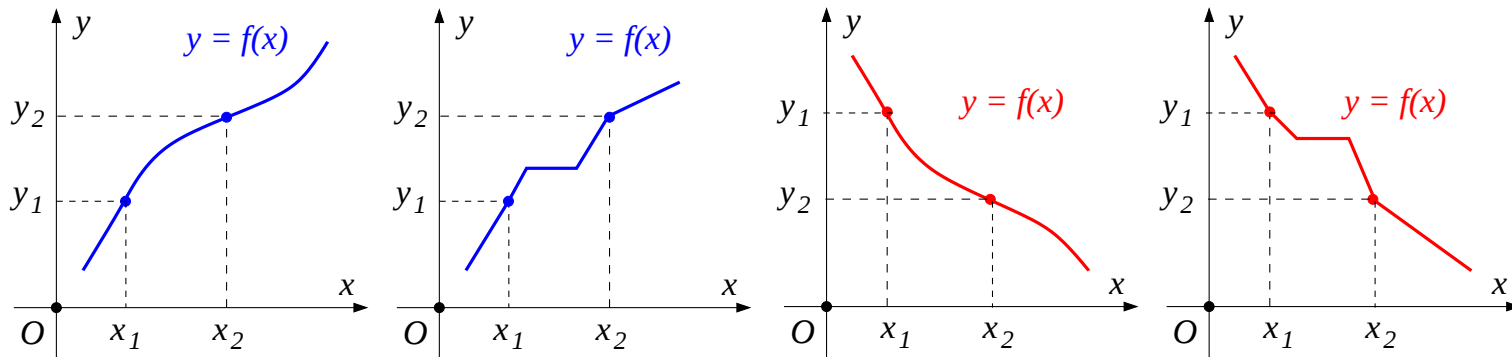
1. *somma*: $f(x) = x$, $g(x) = 5 \Rightarrow (f + g)(x) = x + 5$
2. *prodotto*: $f(x) = x$, $g(x) = x + 5 \Rightarrow (f \cdot g)(x) = x(x + 5) = x^2 + 5x$
3. *quoziente*: $f(x) = x + 3$, $g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{f}{g}(x) = \frac{x + 3}{x^2 - 1}$
4. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$, $h(x) = x - 5 \Rightarrow \frac{f - g}{h}(x) = \frac{\sqrt{x} - x^2}{x - 5}$ qual è il dominio ?

Funzioni Monotone 1



una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

- **strettamente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- **debolmente crescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- **strettamente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.
- **debolmente decrescente:** $\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

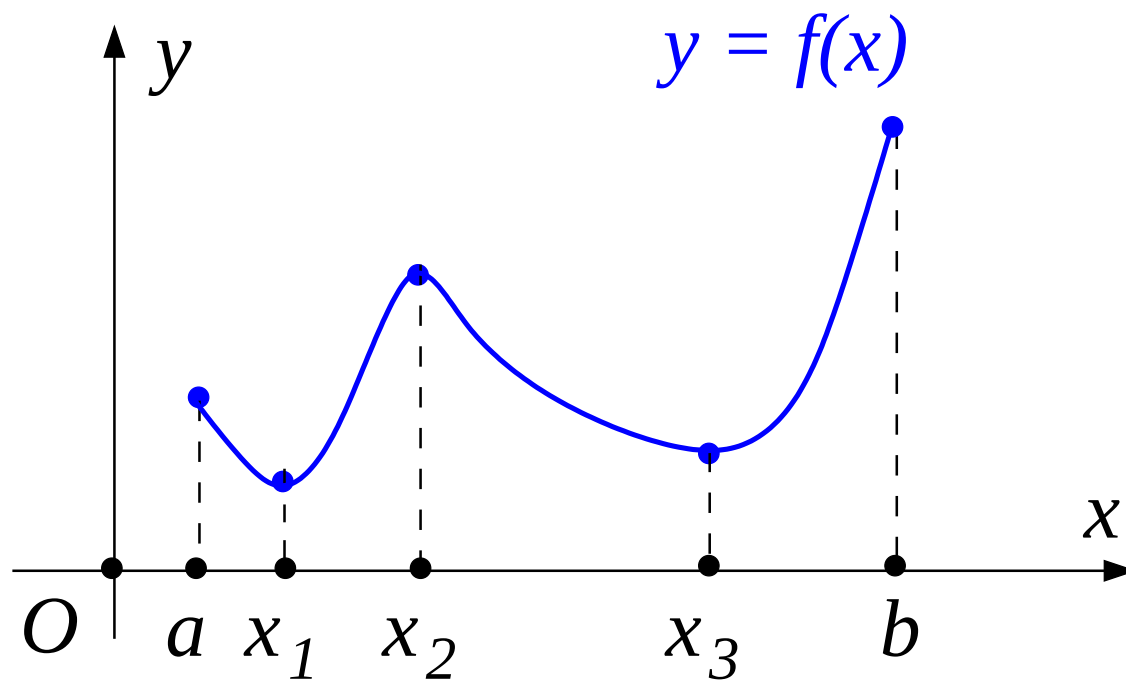


Minimi e Massimi 1



- **minimo (detto anche minimo assoluto (globale)):**
 x_0 è punto di minimo se $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in A$ (*dominio*)
- **massimo (detto anche massimo assoluto (globale)):**
 x_0 è punto di massimo se $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in A$ (*dominio*)
- **minimo relativo (locale):**
si dice che in x_0 la funzione ha un punto di minimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *maggiori o uguali* di $f(x_0)$
ovvero
 x_0 è punto di minimo relativo se $\exists \delta > 0$
tale che $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$
- **massimo relativo (locale):**
si dice che in x_0 la funzione ha un punto di massimo relativo se “vicino” a x_0 assume solo valori *minori o uguali* di $f(x_0)$
ovvero
 x_0 è punto di massimo relativo se esiste $\delta > 0$
tale che $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

Minimi e Massimi di Funzione - 2



- x_1 punto di minimo assoluto, $f(x_1)$ valore minimo assoluto;
- x_2 punto di massimo relativo, $f(x_2)$ valore massimo relativo;
- x_3 punto di minimo relativo, $f(x_3)$ valore minimo relativo;
- b punto di massimo assoluto, $f(b)$ valore massimo assoluto.