Mathesis 9 febbraio 2006

Caso, intelligenza e decisioni razionali:spunti didattici

A. Torre

Università di Pavia

http://www-dimat.unipv.it/atorre/conferenza.pdf

Motivazioni per cui la TEORIA DEI GIOCHI si presta all'insegnamento secondario:

Le tecniche matematiche necessarie per affrontare problemi anche di qualche rilievo non sono difficili.

Si presta a molti legami interdisciplinari: economia, biologia, scienze politiche, problemi legati all'ambiente, giustizia distributiva, ecc....

È un modello matematico diverso da quelli tradizionalmente presenti nell'insegnamento secondario e pertanto molto utile a vedere ancora una volta come la matematica possa essere un aiuto per descrivere e interpretare la realtà che ci circonda.

UN PO' DI STORIA

La teoria dei giochi è una disciplina matematica molto recente. La sua nascita viene convenzionalmente fissata con l'uscita del famoso libro di von Neumann-Morgenstern "Theory of Games and Economic Behavior" (Princeton University Press, 1944).

Naturalmente con questo non si vuol dire che prima del 1944 non ci siano stati importanti contributi allo studio matematico dei giochi, ma il libro di von Neumann e Morgenstern è il primo a proporre questo programma in maniera sistematica e soprattutto in relazione allo studio delle scienze sociali.

Già dalla fine del settecento c'era il progetto di estendere ad altri campi del sapere il metodo matematico che aveva rivoluzionato lo studio della fisica. I tentativi fatti erano più che altro volti a riproporre un modello molto simile a quello della fisica matematica. In quest'ottica si possono vedere i lavori di Walras sull'equilibrio economico generale.

Nella prima parte del libro di von Neumann e Morgenstern è presente una critica radicale alla teoria walrasiana dell'equilibrio economico generale, rea, secondo gli autori, di non tenere in considerazione l'influsso che le interazioni con gli altri individui hanno sulle decisioni di ogni singolo individuo. La vera rivoluzione non è usare i metodi matematici utili per lo studio della fisica applicandoli all'economia, ma costruire una "matematica nuova", che fornisca uno strumento adatto allo studio di questi argomenti: la teoria dei giochi.

Il libro di von Neumann e Morgenstern suscitò enormi attese ed ebbe un fortissimo impatto ma, dopo alcuni anni di successo, subentrò un periodo di sfiducia nella teoria dei giochi, che è diventata strumento importante per l'analisi economica solo dagli anni 80.

La TdG che potremmo chiamare “Teoria delle decisioni interattive” si occupa delle situazioni in cui:

- interviene più di un decisore,
- ogni decisore detiene solo un controllo parziale,
- i decisori hanno preferenze non necessariamente uguali sugli esiti.

Si assume solitamente che i decisori:

- conoscano la situazione di interazione (conoscenza comune),
- possano scegliere tra diversi corsi d'azione,
- siano intelligenti (molto intelligenti e senza limiti alle loro capacità di calcolo o deduzione).

Una prima distinzione nell'ambito della teoria dei giochi è quella tra:

- Giochi cooperativi (si possono fare accordi vincolanti)

- Giochi non cooperativi (non si possono fare accordi vincolanti)

Mi occuperò solo di giochi non cooperativi in forma strategica.

SOMMA ZERO (Von Neumann)

Consideriamo la seguente matrice:

I/II	L	R
T	4,-4	1,-1
B	3,-3	2,-2

Ragionamenti del giocatore I: se II gioca L a me conviene giocare T, se io gioco T a II conviene giocare R, se II gioca R a me conviene giocare B, se io gioco B a II conviene giocare R, se II gioca R a me conviene giocare B. (B, R) è un equilibrio.

I/II	L	R	min	
T	4	1	1	
B	3	2	2	max dei min =2
max	4,	2		
			min dei max=2	

Abbiamo che il min dei max sulle colonne è uguale al max dei min sulle righe! È un caso? No, se abbiamo un equilibrio in un gioco a somma zero, le strategie componenti sono di maxmin=minmax.

Due problemi:

In generale non è vero che maxmin=minmax: esempio (pari o dispari)

I/II	L	R
T	-1,1	1,-1
B	1,-1	-1,1

Qui $minmax = 1$ e $maxmin = -1$ la risposta è data da Von Neumann.

Secondo problema: i giochi non sono sempre a somma zero. La risposta è data da Nash.

DILEMMA DEL PRIGIONIERO

I/II	L	R
T	5,5	0,6
B	6,0	1,1

Osserviamo il gioco dal punto di vista di ciascun giocatore:

I/II	L	R
T	5,	0
B	6	1

I/II	L	R
T	5	6
B	0	1

La soluzione è: i giocatori giocano il primo B e il secondo R e prendono 1 ciascuno, ma il risultato è inefficiente.

ESEMPI DI SITUAZIONI IN CUI LA SOLUZIONE NON CO-OPERATIVA È INEFFICIENTE:

la tragedia dei commons

la raccolta differenziata

Il protocollo di Kyoto

le cartacce per terra

lo spam in internet

buttarsi tutti sulla bionda nel film “A beautiful mind”

L'idea di Nash è proprio questa:

Il risultato del gioco dipende da quello che fanno entrambi i giocatori, ma se I sa cosa fa II, allora il risultato dipende solo da lui e simmetricamente per II

Una coppia di strategie è un equilibrio di Nash se nessuno dei due giocatori ha interesse a deviare unilateralmente.

EQUILIBRIO DI NASH Consideriamo il gioco:

$(X,\ Y,\ f,\ g:\ X \times Y \to \mathbf{R})$

dove X e Y sono gli spazi di strategie, e f, g sono le funzioni di utilità dei giocatori

$(\bar{x}, \bar{y}) \in X \times Y$ si dice **equilibrio di Nash** se

[1] $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, \bar{y}) \quad \forall x \in X$

[2] $g(\bar{x}, \bar{y}) \geq g(\bar{x}, y) \quad \forall y \in Y$

Nel caso del dilemma del prigioniero la soluzione non è solo un equilibrio di Nash ma è anche ottenuta per eliminazione di strategie dominate.

I/II	t_1	t_2	t_3
s_1	8	3	4
s_2	5	2	-2
s_3	9	-1	3

Osserviamo la matrice: cosa può fare il primo giocatore se è "pessimista" (ma nel caso dei giochi a somma zero ha senso esserlo, mentre negli altri casi è "paranoico").

Il giocatore I guarda le sue strategie (le righe della matrice) e si chiede in ciascuna riga cosa è il peggio che gli può capitare e lo massimizza, cioè cerca la sua strategia di maxmin, che in questo caso è s_1 e il valore del maxmin è 3.

Analogamente il giocatore II guarda le sue strategie (le colonne della matrice) e si chiede in ciascuna colonna cosa è il peggio che gli può capitare (attenzione che nella matrice sono segnati i guadagni del primo giocatore, quindi il peggio che gli può capitare è il massimo) e lo minimizza, cioè cerca la sua strategia di minmax, che in questo caso è t_2 e il valore del minmax è 3.

Quando il minmax coincide con il maxmin la soluzione che troviamo è ragionevole. Purtroppo però in generale il minmax non coincide con il maxmin.

Il risultato è che II paga 3 a I. Chiaramente l'esempio che ho fatto è stato scelto ad hoc affinchè tutto funzioni e alla fine si trovi un' unica uscita sensata per il gioco.

PARI O DISPARI

I/II	L	R
T	-1,1,	1,-1
B	1,-1	-1,1

Non possiede equilibri di Nash e nemmeno maxmin.(provare per credere!)

Questo è un gioco "apparentemente" senza soluzione.

(È senza soluzione sia nel senso del maxmin che nel senso dell'equilibrio di Nash) se ci limitiamo alle strategie che abbiamo scritto.

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	-1,1,	1,-1
$1-p$	B	-1,1	1,-1

Ma se pensiamo alla cosidetta "estensione mista del gioco", cioè se pensiamo alle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie, allora la faccenda cambia. In altre parole, il giocatore I invece di fare una scelta per così dire "secca", può scegliere di giocare la strategia T con probabilità p e la strategia B con probabilità $1-p$. Analogamente il giocatore II.

Vediamo cosa succede se pensiamo a questo spazio di strategie più grande. Una distribuzione di probabilità nel caso di due strategie è la scelta di un numero nell'intervallo $[0, 1]$.

Attenzione: abbiamo cambiato lo spazio delle strategie, facendolo diventare molto più grande.

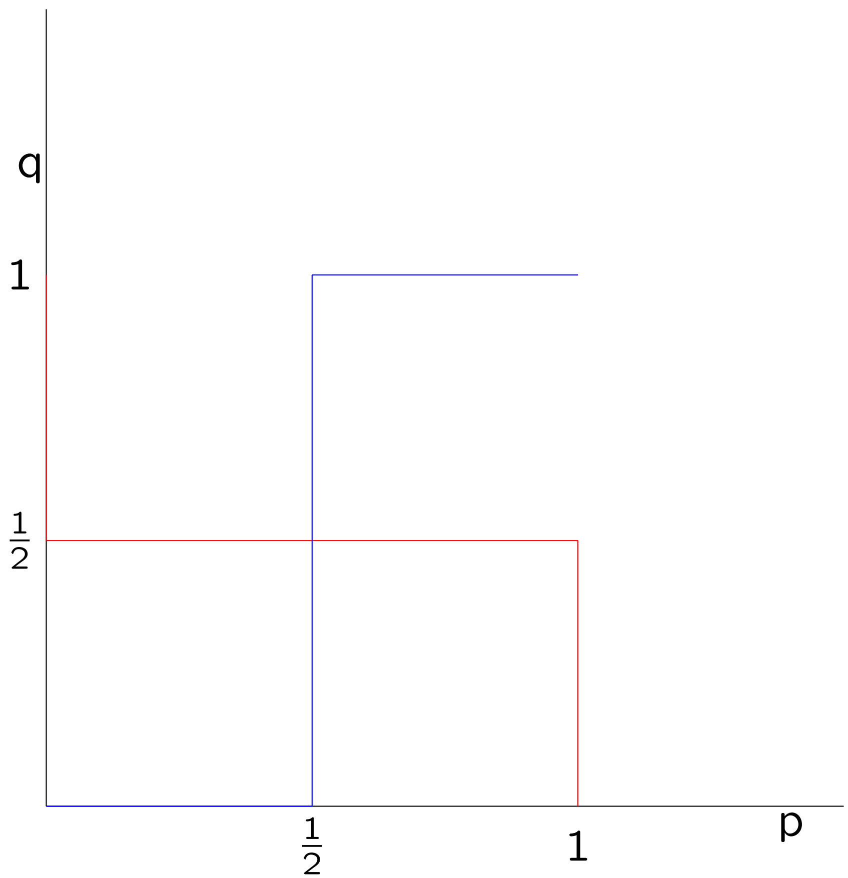
Una strategia per il primo giocatore è adesso rappresentata da un numero p compreso tra 0 e 1, mentre una strategia per il secondo da un numero q compreso tra 0 e 1. Come calcoliamo il payoff dei giocatori in corrispondenza ai valori p e q delle strategie? Semplicemente calcoliamo il payoff atteso, supponendo che i due agiscano indipendentemente..

		q	$1-q$
	I/II	L	R
p	T	pq	$p(1-q)$
$1-p$	B	$(1-p)q$	$(1-p)(1-q)$

che nel nostro caso per il primo giocatore è:

$$f(p,q) = pq\cdot(-1) + p(1-q)\cdot(+1) + q(1-p)\cdot(+1) + (1-p)(1-q)\cdot(-1) = (-4pq + 2p + 2q - 1 = (-4q+2)p + 2p - 1$$

Naturalmente il payoff atteso del secondo è il suo opposto.



In rosso è segnata la strategia di miglior risposta del primo giocatore e in blu quella del secondo. Nel punto di intersezione $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, p è miglior risposta a q e viceversa.

Se cerchiamo le strategie in cui il maxmin coincide con il minmax troviamo la stessa cosa. Gli spazi di strategie sono infiniti, quindi se vogliamo trovare il $maxmin$ e il $minmax$ adesso lo dobbiamo cercare non più su un insieme finito (l'insieme delle strategie "pure" dei giocatori) ma sull'insieme delle distribuzioni di probabilità sull'insieme delle strategie pure, che è un insieme infinito ma (per chi conosce questa terminologia) compatto.

Per il primo giocatore cerchiamo $max_p min_q f(p,q) = max_p((-4p+2)q + 2p - 1)$. Si vede facilmente che questo valore è 0 e viene realizzato per $\bar{p} = \frac{1}{2}$ Analogamente il $minmax$ vale 0 e viene realizzato per $\bar{q} = \frac{1}{2}$.

In questo caso si vede facilmente che $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ sono soluzione del problema. Data la simmetria del gioco, potevamo aspettarci la simmetria della soluzione: in questo ambito più generale la soluzione di $maxmin = minmax$ sta nel giocare con uguale probabilità la prima e la seconda strategia per entrambi i giocatori. In questo modo il valore atteso (0) è meglio del vecchio $maxmin$ (calcolato in strategie pure) per il primo e meglio del $minmax$ in strategie pure per il secondo.

I due valori $\bar{p} = \frac{1}{2}$ e $\bar{q} = \frac{1}{2}$ tali che

$$f(p, \bar{q}) \leq f(\bar{p}, \bar{q}) = max_p min_q f(p, q) = min_q max_p f(p, q) \leq f(p, \bar{q})$$

per ogni p e q in [0,1]. Inoltre, se uno dei due giocatori decide di usare questa strategia mista, l'altro non può fare nulla per contrastarlo, perchè qualunque cosa faccia si procura lo stesso o meno. Abbiamo pagato il prezzo di rendere molto più grande lo spazio delle strategie, ma abbiamo trovato una soluzione soddisfacente.*

*Questo fatto non deve sorprendere: si pensi ad esempio al problema della soluzione delle equazioni algebriche che se collocato nell'insieme dei numeri interi o razionali o reali non sempre ha soluzione mentre è sempre risolubile pur di collocarsi in campo complesso.

Teorema di Von Neumann. Se $(X,\ Y,\ f,\ -f)$ è l'estensione mista di un gioco a somma zero finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano il maxmin=minmax.

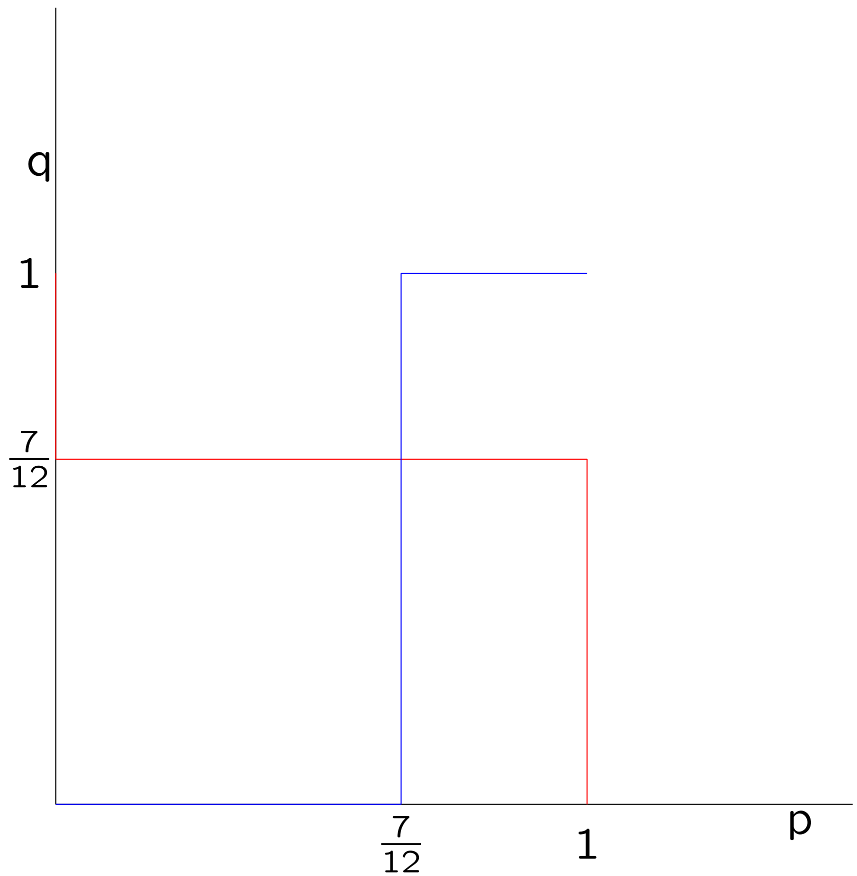
Teorema di Nash. Se $(X,\ Y,\ f,\ g)$ è l'estensione mista di un gioco finito, allora esiste almeno una coppia di strategie che realizzano un equilibrio di Nash.

Gli equilibri di Nash di un gioco a somma zero sono le coppie di strategie che realizzano il maxmin=minmax

Vediamo questo gioco:

I/II	L	R
T	-2,2	3,-3
B	3,-3	-4,4

Facendo i conti si vede che l'equilibrio si ottiene per $p = \frac{7}{12}$ e $q = \frac{7}{12}$ con un guadagno atteso per I uguale a $\frac{1}{12}$. Quindi, questo gioco che a una analisi poco attenta sembra pari, in realtà se entrambi i giocatori giocano al meglio delle loro possibilità dà al primo giocatore un guadagno atteso positivo.


q
1
7/12
7/12
1
p

Analogamente il gioco delle cinque dita:

I/II	1	2	3	4	5
1	-1	1	-1	1	-1
2	1	-1	1	-1	1
3	-1	1	-1	1	-1
4	1	-1	1	-1	1
5	-1	1	-1	1	-1

I giocatori (I e II) devono scegliere contemporaneamente e indipendentemente un numero tra 1 e 5. Se la somma dei due numeri è pari, vince II. Altrimenti vince I. Questo gioco apparentemente avvantaggia il giocatore 2 ma l'equilibrio è $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$per il primo giocatore e $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0)$ per il secondo con valore atteso 0. Questa è la differenza tra il trovarsi di fronte al caso e di fronte a un essere intelligente che va a caso "con intelligenza".