BREVE INTRODUZIONE ALLA PROBABILITÀ ELEMENTARE

24-3-2003

1 Introduzione

Il calcolo delle probabilità si occupa di tutte quelle situazioni in cui un esperimento può avere parecchi esiti e si vuole costruire un modello matematico in grado di studiare questa incertezza: spesso nelle situazioni pratiche non si ha certezza ma neppure totale incertezza.

Supponiamo di avere un esperimento con un numero finito di esiti possibili ed “equiprobabili. Questa è una situazione che si presenta per esempio quando non si sa nulla dell'esperimento e a priori l'unica cosa che si può pensare è che tutti i risultati hanno “la stessa dignità di essere veri.

Definizione 1.1 CLASSICA Supponiamo che un certo esperimento abbia N casi possibili “equiprobabili e che n di questi casi siano favorevoli al verificarsi di un certo evento. In tal caso si definisce probabilità dell'evento il rapporto $\frac{n}{N}$ tra il numero dei casi favorevoli al verificarsi dell'evento e il numero dei casi possibili.

Esempio 1.1 *Supponiamo di avere un dado che a priori pensiamo non truccato e di lanciarlo . La probabilità che lanciandolo esca un numero strettamente maggiore di 2 è 4/6. Questo numero si ottiene dividendo il numero dei possibili esiti del lancio che danno un numero maggiore di due per il numero totale dei possibili esiti.*

Esempio 1.2 *Supponiamo di avere una moneta non truccata e ci chiediamo quale è la probabilità che lanciandola esca “TESTA. Ovviamente per simmetria tale probabilità è 1/2.*

Esercizio 1.1 *Tre palline rosse e tre bianche vengono messe a casaccio in tre cassetti (due per cassetto) . Calcolare la probabilità che ogni cassetto ne contenga una bianca e una rossa.*

Soluzione: Nel primo cassetto la prima va sempre bene, la seconda va bene in tre casi su 5, nel secondo cassetto, se va bene il primo, la prima pallina va sempre bene e la seconda va bene in due casi su tre. Se vanno bene i primi due cassetti va necessariamente bene anche il terzo. Dunque i casi favorevoli sono $3 \cdot 2$ e quelli possibili sono $5 \cdot 3$, quindi la probabilità è 6/15=2/5.

Esercizio 1.2 *Calcolare la probabilità che in una famiglia con tre figli ci siano esattamente 0, 1, 2, 3 maschi.*

Esercizio 1.3 *Calcolare la probabilità che lanciando contemporaneamente due dadi la somma delle uscite sia 5*

La definizione intuitiva si presta a critiche: la più convincente è il fatto che è data usando il concetto di eventi equiprobabili, quindi in un certo senso usando la probabilità.

Una impostazione alternativa spesso usata è **la definizione "frequentista.**

Definizione 1.2 *Secondo questa impostazione la probabilità di un evento, per esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta, è il limite a cui tende il rapporto* $\frac{n}{N}$ *dove* n *è il numero di teste e* N *è il numero di lanci totali, quando* N *tende all'infinito.*

La definizione frequentista presenta il problema che, essendo una definizione sostanzialmente "pratica basata su un concetto di limite, per il calcolo effettivo presupporrebbe infiniti esperimenti (fatto impossibile). Si potrebbe pensare che infinito è nella pratica un numero molto grande, ma effettuando un numero grande di lanci $\frac{n}{N}$ difficilmente sarà proprio $\frac{1}{2}$. Senza contare che spesso nei casi concreti un esperimento non e ripetibile. D'altra parte ovvie considerazioni di simmetria ci portano a pensare che quella probabilità **deve** essere $\frac{1}{2}$.

Un'altra possibile definizione è quella di **probabilità soggettiva**. La probabilità soggettiva può essere così espressa: considerato un evento che sia incerto per un individuo, la probabilità P(A) che il soggetto stesso attribuisce all'evento A è un numero reale che esprime la disponibilità del soggetto a versare una posta MA col patto di ottenere una vincita V se l'evento A si verifica. Tale disponibilità è misurata dal rapporto P(A) = MA/V. La concezione soggetivista della probabilità porta ad una definizione che si potrebbe formulare nel modo seguente: la probabilità di un evento A è la misura del grado di fiducia che un individuo coerente attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di A.

Vale la pena di osservare che proprio questa è la definizione di probabilità a cui più spesso ricorriamo nelle nostre considerazioni quotidiane ("domani pioverà, "questa volta passerò l'esame, ecc.).

Un modo per "tagliare la testa al toro è **l'impostazione assiomatica** , vale a dire : ciascuno la pensi come vuole, si faccia una sua idea di probabilità, purchè questa non vada contro alcune proprietà che decidiamo debbano essere soddisfatte e che definiscono "implicitamente il concetto di probabilità.

Per essere più chiari (o forse solo più formali), analizzando i primi due esempi, cerchiamo di "assiomatizzare la situazione.

Una situazione di incertezza dà luogo ad un insieme di possibili eventi: per esempio nel primo caso gli eventi sono l'insieme

$$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

che rappresenta tutte le possibili uscite del lancio di un dado, mentre nel secondo caso gli eventi sono l'insieme

$$\{TESTA, CROCE\}$$

che rappresenta tutte le possibili uscite dopo il lancio della moneta.

Indichiamo in generale con Ω, che chiameremo evento certo, l'insieme di tutti i possibili esiti dell'esperimento : è infatti certo che dopo l'esperimento accada uno dei possibili esiti dell'esperimento stesso.È naturale attribuire all'evento certo probabilità 1.

In effetti quando si lancia un dado è certo che uscirà uno dei sei numeri che compaiono sulle facce e quando si lancia una moneta si è certi che uscirà o TESTA o CROCE. I sottoinsiemi di Ω vengono invece interpretati come eventi aleatori: tra questi l'insieme vuoto è l'evento impossibile ed è naturale attribuirgli probabilità 0. Tutti i sottoinsiemi di Ω vengono detti eventi e ciascuno di essi ha una probabilità che è un numero compreso tra 0 e 1. Cerchiamo allora di formalizzare la **definizione assiomatica** di probabilità, almeno nel caso di un insieme finito.

Definizione 1.3 *Sia Ω un insieme finito, che chiameremo spazio degli eventi. Consideriamo poi l'insieme $P(\Omega)$ di tutti i sottoinsiemi di Ω . Si dice probabilità su Ω una funzione p a valori reali che soddisfi i seguenti assiomi:*

- *1)* $0 \leq p(A) \leq 1$ *per ogni* $A \subseteq \Omega$,
- *2)* $p(\Omega) = 1, p(\emptyset) = 0$.
- *3)* $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2)$ *per ogni coppia di sottoinsiemi* A_1 A_2 *contenuti in* Ω *tali che* $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Volendo essere più precisi

Uno spazio di probabilità finito è una terna:

$$(\Omega\ ,\ P(\Omega)\ ,\ p)$$

dove Ω è un insieme, $P(\Omega)$ è l'insieme dei sottoinsiemi di Ω e p è una funzione definita su $P(\Omega)$ a valori reali che soddisfa le condizioni 1), 2), 3):

Definizione 1.4 *Due eventi A_1 e A_2 si dicono incompatibili se $A_1 \cap A_2 = \emptyset$*

Definizione 1.5 *Un evento A_2 si dice complementare di A_1 se è il complementare di A_1 in Ω.*

Esempio 1.3 *In un'urna ci sono 4 palline nere e 5 bianche. Ne estraiamo una: qual'è la probabilità che sia bianca?*

Soluzione: Siano N_1, N_2, N_3, N_4 le 4 palline nere e B_5, B_6, B_7, B_8, B_9 le cinque palline bianche.

$$\Omega = \{N_1, ..., N_4, B_5, ..., B_9\}$$

Poiche non c'e trucco:

$$p(N_1) = p(N_2) = ... = p(B_5) = ...p(B_9) = \frac{1}{9}$$

Noi dobbiamo calcolare

$$p\{B_5, ..., B_9\} = p(B_5) + ... + p(B_9) = \frac{5}{9}$$

Quindi la probabilità è 5/9.

Esercizio 1.4 *Nelle ipotesi dell'esempio estraiamo dapprima dall'urna una pallina senza guardarla. Successivamente ne estraiamo un'altra , sempre senza guardare la prima. Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?*

Soluzione: In questo caso possiamo prendere come Ω l'insieme di tutte le coppie ordinate di palline. Ω contiene $9 \cdot 8$ elementi e, sempre per simmetria, ciascun elemento di Ω ha esattamente probabilità $\frac{1}{72}$. L'insieme di cui dobbiamo trovare la probabilità è quello formato dalle coppie con il secondo elemento bianco e quindi contiene $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 40$ elementi, dunque la probabilità e $\frac{1}{72} \cdot 40 = \frac{5}{9}$

Avremmo potuto trovare lo stesso risultato anche pensando che l'operazione effettuata prima della seconda estrazione è assolutamente ininfluente. In questo ordine di idee lo spazio degli eventi è

$$\Omega' = \{N_1, ..., N_4, B_5, ..., B_9\}$$

con probabilità $\frac{1}{9}$ per ogni elemento e l'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è $\{B_5, ..., B_9\}$

Ben diversa sarebbe stata la situazione dell'esempio 2 se noi avessimo guardato la pallina estratta la prima volta e avessimo scoperto che era bianca. In tal caso lo spazio degli eventi contiene 4 palline bianche e 4 nere e quindi la probabilità è $\frac{1}{2}$.

Osservazione 1.1 *La probabilità dipende essenzialmente dall'informazione di chi la calcola, infatti nei due esperimenti precedenti l'unica cosa che abbiamo variato è un dato di informazione.*

Osservazione 1.2 *Nei due metodi di risoluzione del problema 2 abbiamo usato due insiemi Ω e Ω' diversi per arrivare poi allo stesso risultato. Questo non deve meravigliare perchè lo spazio degli eventi non è dato a priori dal problema, ma fa parte del modello costruito da noi. A partire dallo stesso problema possono esserci più modelli per risolverlo.*

2 Variabili aleatorie

Ora che ci siamo chiariti le varie impostazioni del concetto di probabilità, passiamo a introdurre il concetto di **Variabile aleatoria**, che ci sarà utile per rappresentare le situazioni dipendenti dal caso. Cominciamo come al solito con due esempi:

Esempio 2.1 *Possiedo 10000 euro e decido di giocarli alla roulette puntandoli sul numero 7. Quale è il valore del mio capitale dopo questa operazione?*

L'insieme Ω in questo caso è l'insieme delle uscite possibili nel gioco della roulette, che sono i numeri tra 0 e 36. In caso di vittoria, e qundi se esce 7, il mio nuovo capitale sarà $\pounds 10000 \cdot 36 = \pounds 360000$ In caso di sconfitta, cioè se esce uno qualunque degli altri numeri, il mio capitale sarà 0. Il valore del capitale è una funzione definita su Ω a valori reali che ad ogni numero della roulette diverso da 7 associa 0 e a 7 associa 360000.

Esempio 2.2 *Due giocatori giocano a testa o croce con una moneta equilibrata. Vince chi per primo totalizza due vincite. Quanto dura la partita?*

Lo spazio Ω è l'insieme dei possibili risultati delle prime 3 partite (si osservi che dopo 3 partite il gioco è comunque finito). Lo spazio Ω degli eventi è dunque

$$\Omega = \{TTT,\ TCT,\ TCC,\ TTC,\ CTT,\ CCT,\ CTC,\ CCC\}$$

La durata del gioco e 2 nel caso TTC,TTC,CCT,CCC e 3 nei casi rimanenti.

Definizione 2.1 Si dice variabile aleatoria una funzione che dipende dal caso, cioè una funzione definita su Ω a valori reali.

Nel primo esempio la variabile aleatoria è il valore del capitale, nel secondo è la durata della partita.

Una variabile aleatoria si indica con una lettera maiuscola, per esempio X e i suoi possibili valori (ricordiamo che Ω è finito) con $x_1, x_2, ...x_n$

Se x è un numero reale, si indica con :

$(X = x) = \{\omega \in \Omega$ tali che $X(\omega) = x\}$. Naturalmente :

$A_1 = (X = x_1), A_2 = (X = x_2), ..., A_n = (X = x_n)\}$

sono eventi .

Indichiamo con $p_1, p_2, ..., p_n$ le rispettive probabilità.

Definizione 2.2 *La legge di una variabile aleatoria è l'insieme formato dai suoi valori possibili* $x_1,\ x_2, ...\ x_n$ *e le corrispondenti probabilità* $p_1, p_2, ...p_n$

Due variabili aleatorie che hanno la stessa legge si dicono equidistribuite.

Definizione 2.3 Si dice speranza matematica o media o valore atteso della variabile aleatoria X il numero

$$E(X) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + ...x_n \cdot p_n.$$

Ovviamente variabili aleatorie equidistribuite hanno la stessa speranza matematica.

Esercizio 2.1 *Dimostrare che:*
1) Se a è un numero reale

$$E(a \cdot X) = a \cdot E(x)$$

2) Se X e Y sono due variabili aleatorie

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

Calcoliamo la speranza matematica della variabile aleatoria che abbiamo dato nell'esempio 1. Si ha:

$$E(X) = 0 \cdot 36/37 + 360000 \cdot 1/37 = 360000/37$$

Calcoliamo ora la speranza matematica della variabile aleatoria del secondo esempio:

$$E(X) = 2 \cdot 4/8 + 3 \cdot 4/8 = 5/2.$$

Osserviamo che in generale il valore atteso di una variabile aleatoria non coincide con alcuno dei valori che la variabile aleatoria assume.

3 PROBABILITÀ CONDIZIONALE

Supponiamo di sapere che un'urna contiene due palline bianche, tre gialle e quattro rosse. In assenza di altre informazioni, la probabilità di estrarre una pallina gialla dall'urna è $\frac{3}{9}$. Ma qual'è la probabilità di estrarre una pallina gialla se sappiamo che la pallina è colorata? Naturalmente in questo caso diventa $\frac{3}{7}$, ed è diversa da quella che avevamo valutato prima. Questa nuova probabltà è la probabilità di estrarre una pallina gialla sotto la condizione che la pallina estratta è colorata.

Cerchiamo di formalizzare la situazione

Sia Ω lo spazio degli eventi che supporremo per ora sempre finito, e sia p una funzione probabilità definita sull'insieme $P(\Omega)$ dei sottoinsiemi di Ω .

Definizione 3.1 *Si dice probabilità condizionale dell'evento $A \subseteq \Omega$ dato l'evento $B \subseteq \Omega$ la quantità*

$$*) \;\; p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Osservazione 3.1 *La formula non è simmetrica in A e B, infatti $p(A/B) \neq p(B/A)$.*

Per renderci conto dela naturalezza di questa formula, supponiamo che tutti gli elementi di Ω siano equiprobabili. In questa ipotesi si ha che p(A/B) è dato dal numero degli elementi di $A \cap B$, che indicheremo con c$(A \cap B)$ diviso il numero degli elementi di B che indicheremo con c(B). Se c(Ω) è il numero degli elementi di Ω si ha :

$$p(A/B) = \frac{c(A \cap B)}{c(B)} = \frac{\frac{c(A\cap B)}{c(\Omega)}}{\frac{c(B)}{c(\Omega)}} = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}.$$

Dalla formula *) si ottiene subito l'identità

$$**) p(A \cap B) = p(A/B) \cdot p(B)$$

che è utile in molti casi pratici.

Nei casi concreti infatti è frequente che si conosca $p(A/B)$ *e* $p(B)$ e che l'incognita sia $p(A \cap B)$.

Esempio 3.1 *Supponiamo di dover calcolare la probabilità che in una estrazione della tombola sia uscito il numero 9, sapendo che è uscito un multiplo di 3.*

Poichè in una uscita della tombola i casi a priori possibili sono 90, l'informazione che il numero uscito è un multiplo di tre ci porta a dover restringere i casi possibili ai multipli di 3 tra 1 e 90, che sono esattamente 30, e dunque abbiamo un caso farovevole all'evento su 30 possibili ed equiprobabili, dunque la probabilità è 1/30.

4 INDIPENDENZA DI EVENTI

Sia (Ω, Σ, p) uno spazio di probabilità. Supponiamo che Ω sia un insieme finito e che $\Sigma = P(\Omega)$.

Definizione 4.1 Si dice che due eventi A, B $\subseteq \Omega$ sono due eventi indipendenti se vale la relazione:

$$p(A/B) = p(A).$$

Per definizione di probabilità condizionale, due eventi A e B sono indipendenti se e solo se:

$$p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B).$$

Da questo si deduce che la definizione di indipendenza di eventi è simmetrica su A, B e quindi è equivalente anche a:

$$p(B/A) = p(B).$$

Praticamente questo significa che sapere se B si è verificato o no non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di A e analogamente sapere che A si è verificato non dà alcuna informazione che modifichi la previsione del verificarsi di B.

Esempio 4.1 *Qualunque sia A, la coppia A ,$\emptyset$ è una coppia di eventi indipendenti*

Esempio 4.2 *Qualunque sia A la coppia A , Ω è una coppia di eventi indipendenti.*

Esempio 4.3 *Consideriamo il lancio di un dado . Gli eventi :*

- *esce un numero primo*
- *esce un numero divisibile per 3*

sono eventi indipendenti in quanto
p (esce un numero primo) =1/2
p (esce un numero divisibile per 3)=1/3.
L' unico numero primo divisibile per 3 è 3 e si ha : $p\{3,\} = 1/6 = 1/2 \cdot 1/3$
Vogliamo ora estendere il concetto di variabile aleatoria a funzioni a valori più in generale su $\mathbf{R^2}$ o ancora più in generale su uno spazio prodotto:

Definizione 4.2 *La funzione*

$$Z = (X, Y) : \quad \Omega \longrightarrow \mathbf{R^2}$$

è una variabile aleatoria se ciascuna delle sue componenti X, Y è una variabile aleatoria.

Analogamente una funzione

$$Z = (X, Y) : \quad \Omega \longrightarrow W = W_1 \times W_2$$

è una variabile aleatoria se ciascuna delle sue componenti è una variabile aleatoria. Nel caso in esame, in cui Ω è finito, una variabile aleatoria è dunque una qualunque funzione definita su Ω a valori nello spazio prodotto $W_1 \times W_2$.Se $Z = (X, Y)$ è una variabile aleatoria a valori in $\mathbf{R^2}$ e $z = (x, y) \in \mathbf{R^2}$, si ha :

$$\{Z = z\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$$

Indichiamo con $z^{(1)}, z^{(2)}, ...$ i valori assunti da Z e con

$$p(z^{(k)}) = p\{Z = z^{(k)}\}.$$

Definizione 4.3 *Una variabile aleatoria X a valori in un insieme W induce su W una misura di probabilità detta legge o distribuzione di X.*

Detto altrimenti, possiamo vedere W come uno spazio di probabilità. Più precisamente, abbiamo che $(W, P(W)), p_X)$ è uno spazio di probabilità. Basta definire, dato $E \subseteq W$:

$$p_X(E) = p\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}.$$

Si verifica facilmente che p_X è effettivamente una misura di probabilità. (Verificarlo!)

Naturalmente come caso particolare una variabile aleatoria a valori su $\mathbf{R}$ o su $\mathbf{R^2}$ induce su questi insiemi una misura di probabilità.

Consideriamo una variabile aleatoria Z a valori in un prodotto $W_1 \times W_2$. Disinteressandoci un attimo del fatto che $W_1 \times W_2$ è un prodotto, è evidente che possiamo usare la solita definizione per trovare la legge di Z. Si ha semplicemente

$$p_Z(E) = p\{\omega \in \Omega : Z(\omega) \in E\}.$$

Tuttavia, essendo $W_1 \times W_2$ un prodotto, assegnare Z equivale ad assegnare due funzioni. la prima a valori in W_1 e la seconda a valori in W_2:

$$X \ : \Omega \longrightarrow W_1$$

e

$$Y \ : \Omega \longrightarrow W_2$$

È allora legittimo chiedersi se ci sia una relazione tra le leggi di queste tre funzioni X, Y, Z.

Definizione 4.4 Data Z , le leggi di X e Y vengono dette leggi marginali della legge di Z.

Affrontiamo ora il problema se ci sia una relazione tra le leggi di X, Y e Z. Dobbiamo fare attenzione al fatto che p_X e p_Y sono leggi definite risp. su W_1 e W_2, mentre p_Z è definita su $W_1 \times W_2$. È evidente però che $p_X(E_1) = p_Z(E_1 \times W_2)$ e analogamente $p_Y(E_2) = p_Z(W_1 \times E_2)$.

Risulta allora evidente che, data p_Z, possiamo calcolarci facilmente p_X e p_Y. Che non sia altrettanto facile la strada a rovescio lo si può vedere già dal fatto che p_Z è definita su tutti i sottoinsiemi di $W_1 \times W_2$ e non tutti i sottoinsiemi di $W_1 \times W_2$ sono del tipo $E_1 \times E_2$.

Esempio 4.4

$$W_1 = \{1, 2\} \quad W_2 = \{1, 2\} \quad E = \{(1, 1), (2, 2)\}$$

Tuttavia questa è solo una difficoltà apparente e potremmo agevolmente superarla nel contesto semplice nel quale ci siamo messi e cioè con Ω finito. In ogni caso, anche qualora prendessimo $E = E_1 \times E_2$ non possiamo ricostruire $p_Z(E)$ dalla conoscenza di $p_X(E_1)$ e $p_Y(E_2)$.

Facciamo un esempio di due variabili aleatorie con leggi marginali uguali che danno luogo alla stessa legge congiunta.

Da un'urna contenente 6 palline numerate da 1 a 6 se ne estraggono 2 con rimpiazzo. Se indichiamo rispettivamente con X e Y i risultati delle due estrazioni e calcoliamo la variabile aleatoria $Z = (X, Y)$, i possibili valori di Z sono coppie (i,j) dove i e j possono prendere i valori interi da 1 a 6. Si tratta di 36 valori possibili e ciascuno è assunto con probabilità 1/36. Le leggi marginali X e Y sono leggi uniformi su $\{1, 2, ..., 6\}$.

Il successivo esperimento è la stessa estrazione ma senza rimpiazzo. Indichiamo rispettivamente con X_1, Y_1 i risultati delle due estrazioni e calcoliamo le leggi di

$$X_1, \ Y_1, \ e \ Z_1 = (X_1, Y_1)$$

I valori di Z non sono gli stessi, perchè ad esempio il risultato (1,1) non è più possibile. Sono quindi solo 30 i valori assunti da Z, tutti equiprobabili, e ciascuno ha probabilità 1/30. D'altra parte anche $X_1, \ Y_1$ hanno la legge uniforme .

Siamo dunque in presenza di due leggi congiunte diverse aventi le stesse marginali.

A questo punto osserviamo che se ci poniamo il problema di costruire p_Z conoscendo p_X e p_Y con l'ulteriore condizione che X e Y siano indipendenti, il problema ha un'unica soluzione (è la definizione stessa di indipendenza a garantirlo !!) Infatti in tal caso

$$p_Z(E) = p_Z(E_1 \times E_2) = p_Z((E_1 \times Y) \cap (X \times E_2)) =$$

$$= p_Z(E_1 \times Y) \cdot p_Z(X \times E_2) = p_X(E_1) \cdot p_Y(E_2).$$

Esercizio 4.1 *Sia* $\Omega = \{a, b, c\}$ con $p(\omega) = 1/3 \ \forall \omega \in \Omega$. *Siano poi* $W_1 = \{T, B\}$ *e* $W_2 = \{L, R\}$, $W = W_1 \times W_2$ *e:*

$$Z : \ \Omega \longrightarrow W$$

così definita:

$$Z(a) = (T, L) \quad Z(b) = (T, R) \ Z(c) = (B, L).$$

Chi sono $p_Z, \quad p_X, \quad p_Y$ *? X e Y sono indipendenti? Trovare X_1 e Y_1 con le stesse marginali ma indipendenti.*

Esercizio 4.2 *Sia* $\Omega = \{a, b\}$ con $p(\omega) = \frac{1}{2} \forall \omega \in \Omega$. *Siano* $X(a) = 1, \ X(b) = 2, \ Y(a) = 3, Y(b) = 4$. *Trovare* p_Z *assumendo che X e Y siano indipendenti.*