Sistemi di voto e indici di potere

Giulia Bernardi
giulia.bernardi@polimi.it

Almo Collegio Borromeo, Pavia
3 Aprile 2019

Problema

Come creare un modello di un sistema di voto?

Diversi aspetti che si possono prendere in considerazione:

- Quale legge elettorale utilizzare?
  $\rightarrow$ Teorema di Arrow...
- Chi riceverà più voti?
  $\rightarrow$ Teorema dell'elettore mediano...
- Quale modello può descrivere le situazioni di voto?
- Chi è più influente nel prendere decisioni?
  $\rightarrow$ Giochi semplici e indici di potere...
- ...

Teorema dell'elettore mediano

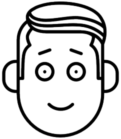
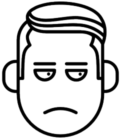
Un accenno

Immaginiamo che gli elettori siano politicamente uniformemente distribuiti dall'estrema destra all'estrema sinistra e decidano di votare per il partito con idee più vicine alle loro.

Se ci sono solo due partiti, dove si posizioneranno per prendere più voti?
C'è un solo equilibrio di Nash: entrambi i partiti si posizionano al centro.

Giochi cooperativi e sistemi di voto

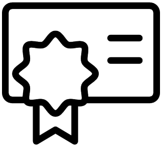
Idea generale

Vota Sì Vota No

$V \downarrow$

Vincente Perdente



Giochi semplici

- v è monotona: $v(S) \leq v(T)$ se $S \subseteq T$
- $v : 2^N \to \{0, 1\}$
- $v(N) = 1$

Giochi di unanimità

Per ogni coalizione S

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{se } S \subseteq T \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$v(A) = 1$ si dice che la coalizione A è **vincente**, altrimenti è detta **perdente**.

Un gioco semplice v può essere caratterizzato dall'insieme delle sue **coalizioni vincenti minimali** $\mathcal{W}^m(v)$ definito come

$$\mathcal{W}^m(v) = \{A : v(A) = 1 \text{ and } B \subsetneq A \implies v(B) = 0\}$$

In un gioco di unanimità u_S, S è l'unico elemento di $\mathcal{W}^m$.

Giochi semplici

Sull'insieme dei giochi semplici si può costruire la struttura di reticolo, rispetto a queste due operazioni:

$v \wedge w$ definita da $v \wedge w(S) = \min\{v(S), w(S)\}$

$v \vee w$ definita da $v \vee w(S) = \max\{v(S), w(S)\}$

Dato un gioco semplice v con $\mathcal{W}^m(v) = \{A, B, C, D \cdots\}$, allora

$$v = u_A \vee u_B \vee u_C \vee u_D \cdots$$

$\star$ *Esercizio* Dimostrare che per ogni $S, T \in 2^N, S, T \neq \emptyset$ si ha che

$$u_S \wedge u_T = u_{S \cap T} \qquad u_S \vee u_T = u_{S \cup T}$$

Giochi a maggioranza pesata

Il gioco

$$[q; w_1, \ldots, w_n]$$

rappresenta una situazione in cui n **giocatori** (ad esempio: partiti, soci di un'azienda) devono prendere una decisione.
Il giocatore i ha peso w_i (ad esempio: numero di seggi in parlamento, quote dell'azienda). Per approvare una decisione è necessario che ci siano almeno q voti a favore.

$$v(A) = \begin{cases} 1 & \sum_{I \in A} w_i \geq q \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

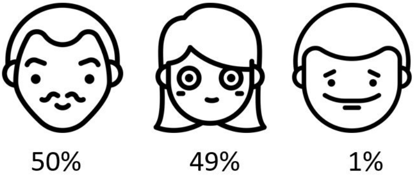
Il gioco che descrive il consiglio di sicurezza dell'Onu è:
$v = [39; 7, 7, 7, 7, 7, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1]$

Per approvare una risoluzione servono i voti dei 5 membri permanenti più almeno di 4 altri membri non permanenti.

Un primo esempio

Una compagnia ha tre soci, che hanno (rispettivamente) il controllo del 50%, del 49% e dell' 1% delle azioni.
Le decisioni vengono prese utilizzando la maggioranza pesata.
Il gioco è

$$v = [51; 50, 49, 1]$$



Cos'è una **soluzione** *per questo gioco?*

Indici di potere

Soluzioni per i giochi cooperativi

Un **valore** (value) per il gioco $v \in \mathcal{G}(N)$ è una funzione

$$\phi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$$

Il vettore $x = (x_1, \ldots, x_n)$ assegna una utilità x_i al giocatore i.

Qual è l'interpretazione nel caso dei giochi semplici?

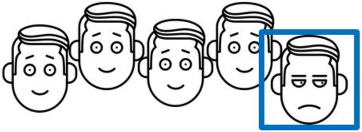
Soluzioni per giochi semplici

$\Phi(v) \in \mathbb{R}^n$ per valutare il *potere* dei giocatori.

Indice di Banzhaf

$$\beta_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

$\rightarrow$ Si conta il numero di coalizioni per cui un giocatore è *cruciale* e lo si divide per il numero totale delle coalizioni.



Indice di Shapley-Shubik

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s!(n-s-1)!}{n!}[v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Valori o indici?

Giochi cooperativi		**Giochi semplici**
Valore di Shapley	$\rightarrow$	Indice di Shapley-Shubik
Valore di Banzhaf	$\leftarrow$	Indice di Banzhaf-Coleman

Giochi cooperativi		**Giochi semplici**
Linearità	$\rightarrow$	Transfer
Dummy Player	$=$	Dummy Player
Simmetria	$=$	Simmetria
Efficienza	$=$	Efficienza

Transfer

Un vettore di soluzione ϕ soddisfa la *transfer* se per ogni coppia di giochi semplici v, w si ha

$$\phi(v \vee w) = \phi(v) + \phi(w) - \phi(w \wedge w)$$

Esempio: le elezioni politiche nel 2013

Senato della Repubblica

$$v = [161; 108, 91, 50, 20, 16, 16, 10, 10]$$

Partito	% Seggi	Shapley	Banzhaf
Partito Democratico	33.65	33.8	32.14
Popolo delle Libertà	28.35	26.19	25.00
5 Stelle	15.58	21.42	23.21
Scelta Civica	6.23	5.24	5.36
Lega Nord	4.98	3.33	3.57
Misto	4.98	3.33	3.57
Grandi Autonomie	3.11	3.33	3.57
Per le Autonomie	3.11	3.33	3.57

Valori probabilistici

Valore probabilistici

$\varphi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa la linearità (transfer) e la proprietà del dummy player.

Teorema

φ è un **valore probabilistico** se e solo se per ogni $i \in N$ esistono $\{p_S^i\}_{S \subseteq N \setminus \{i\}}$ tali che $p_S^i \geq 0$, $\sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i = 1$

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_S^i [v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Probabilistico + efficiente $\Longrightarrow$ quasivalue.
Probabilistico + simmetrico $\Longrightarrow$ semivalue.

Semivalue

Semivalue

$\varphi : \mathcal{G}(N) \to \mathbb{R}^n$ che soddisfa la linearità (transfer), la simmetria e la proprietà del dummy player.

Teorema

φ è un **semivalue** se e solo se esistono $\{p_s\}_{s=0,\dots n-1}$ tali che $p_s \geq 0$, $\sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p_s = 1$

$$\varphi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} p_s[v(S \cup \{i\}) - v(S)].$$

Altri semivalues

q-binomiale

$$\phi_i(v) = \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} q^s (1-q)^{n-s-1} [v(S \cup \{i\}) - v(S)]$$

Dittatoriale

$$p_0 = 1 \qquad p_s = 0$$

per ogni $s = 1, \ldots, n-1$.

Marginale

$$p_s = 0 \qquad p_{n-1} = 1$$

per ogni $s = 0, \ldots, n-2$.

→ L'indice di Banzhaf è $\frac{1}{2}$-binomiale.

→ L'indice dittatoriale considera solo il contributo dei singletons, mentre l'indice marginale considera solo il contributo portato quando si forma la grande coalizione.

Altri semivalues

Values modificati

Se φ è un semivalue con coefficienti p_s, il semivalue modificato $\varphi_{m_1}^{m_2}$ è definito dai coefficienti

$$p'_s = \begin{cases} \frac{p_s}{\sum_{j=m_1}^{m_2} p_j \binom{n-1}{j}} & \text{se } s \in [m_1, m_2] \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Shapley modificato:

$$p'_s = \frac{1}{(m_2 - m_1 + 1)\binom{n-1}{s}}$$

Banzhaf modificato:

$$p'_s = \frac{1}{\sum_{j=m_1}^{m_2} \binom{n-1}{j}}$$

Senato della Repubblica

	PD	PdL	5 Stelle	Sc. Civica	Altri
$\beta = \beta_0^7$	32.14	25	23.21	5.357	3.571
β_0^1, β_1^1	50	50	0	0	0
β_0^2, β_1^2	37.5	25	18.75	6.25	3.125
$\beta_3^3, \beta_3^4, \beta_4^4$	30.0	25.0	25.0	5.0	3.75
β_2^4, β_3^5	31.05	24.74	24.21	5.263	3.684
β_5^6, β_5^7	37.5	25	18.75	6.25	3.125
β_6^6, β_6^7	50	50	0	0	0

Table: L'indice di Banzhaf modificato

Altri indici di potere

Indice di Deegan-Packel

$$\delta_i(v) = \frac{1}{|\mathcal{W}^m(v)|} \sum_{s=1}^{n} \frac{1}{s} |S \in \mathcal{W}^m(v) : i \in S \text{ e } |S| = s|$$

$\rightarrow$ Potere diviso tra le coalizioni vincenti minimali con la stessa cardinalità che contengono il giocatore i e tutte le coalizioni vincenti minimali

Public Good index

$$H_i(v) = \frac{|S \in \mathcal{W}^m(v) : i \in S|}{\sum_{j \in N} |S \in \mathcal{W}^m(v) : j \in S|}$$

$\rightarrow$ Rapporto tra le coalizioni vincenti minimali che contengono i e tutte le coalizioni vincenti minimali che contengono altri giocatori

Questi due indici soddisfano l'efficienza, la simmetria, la dummy player ma *non* soddisfano la transfer.

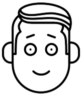
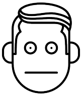
Riprendiamo l'esempio

$$v = [51; 50, 49, 1]$$

- Shapley: $(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
- Banzhaf: $(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- Deegan-Packel: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$
- Public Good: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$

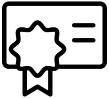
Quale usare? Dipende...

Una terza possibilità di voto


Vota Sì   Si astiene   Vota No

$$v \downarrow$$


Vincente   Perdente


Giochi con astensione

(N, v) con $v : 3^N \to \{0,1\}$ e

- $S \subseteq T \implies v(S) \leq v(T)$
- $v(N, \emptyset, \emptyset) = 1$ e $v(\emptyset, \emptyset, N) = 0$

$$v(S_1, S_2, S_3) = 1 \longleftrightarrow S \text{ è una tripartizione } \textbf{vincente}$$

Esempio: il consiglio di sicurezza dell'Onu

$$N = \{15 \text{ membri } \}$$

$P = \{$Cina, Francia, Russia, UK, US$\}$ insieme dei rappresentati permanenti con potere di *veto*

Come gioco semplice, $S \subseteq N$ è vincente se

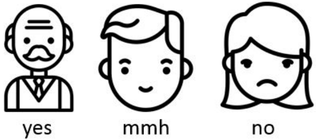
$$|S| \geq 9 \wedge S \cap P = \emptyset.$$

Come gioco con astensione, $S = (S_1, S_2, S_3)$ è vincente se

$$|S_1| \geq 9 \wedge S_3 \cap P = \emptyset.$$

Un altro esempio

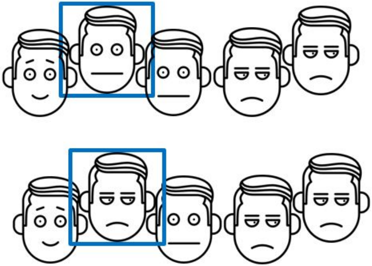
Un professore e due assistenti: l'esame viene superato se e solo se si ottiene il voto favorevole del professore e almeno uno dei due assistenti non è contrario.



$$N = \{a, b, c\}$$

Le tripartizioni vincenti minimali sono: (a, b, c) e (a, c, b)

Banzhaf per i giochi con astensione



$$\beta_a^{YA}(v) = \frac{1}{3^{n-1}} |\{S : a \in S_1 \text{ e } v(S) - v(S_{\downarrow a}) = 1\}|$$

$$\beta_a^{AN}(v) = \frac{1}{3^{n-1}} |\{S : a \in S_2 \text{ e } v(S) - v(S_{\downarrow a}) = 1\}|$$

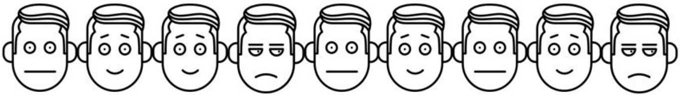
$$\beta_a(v) = \beta_a^{YA}(v) + \beta_a^{AN}(v)$$

$\rightarrow$ L'indice di Banzhaf è diviso in due componenti per contare quando un giocatore è cruciale cambiando dal sì all'astensione e quando lo è cambiando dall'astensione al no.

Shapley per i giochi con astensione

Spazio dei roll-calls: $\mathcal{R} = \Pi_N \times 3^N$ con cardinalità $|\mathcal{R}| = 3^n n!$

$\rightarrow$ Lo spazio dei roll-call comprende tutti i possibili ordinamenti dei giocatori considerando anche tutte le loro diverse possibilità di voto



a è **pivotale** in R per il gioco v se dopo il voto di a l'esito è fissato, qualsiasi cosa votino i giocatori successivi ad a.

$$\phi_a(v) = \frac{|\{R : a = piv(R, v)\}|}{3^n n!}$$

$\rightarrow$ L'indice di Shapley conta il numero di roll-call per cui a è pivotale

Professori e assistenti

Il giocatore b, uno dei due assistenti, è pivotal se

- vota **sì** votando dopo a, che ha votato sì, se c precede b ha votato no:

$$\begin{array}{lll} abc \times (ab, \emptyset, c) & abc \times (ab, c, \emptyset) & abc \times (abc, \emptyset, \emptyset) \\ acb \times (ab, \emptyset, c) & & \\ cab \times (ab, \emptyset, c) & & \end{array}$$

- **si astiene** votando dopo a, che ha votato sì, se c precede b ha votato no:

$$\begin{array}{lll} abc \times (a, b, c) & abc \times (a, bc, \emptyset) & abc \times (ac, b, \emptyset) \\ acb \times (a, b, c) & & \\ cab \times (a, b, c) & & \end{array}$$

- vota **no** se vota dopo di c che ha votato no, e a vota sì se precede b:

$$\begin{array}{lll} cba \times (a, \emptyset, bc) & cba \times (\emptyset, a, bc) & cba \times (\emptyset, \emptyset, abc) \\ acb \times (a, \emptyset, bc) & & \\ cab \times (a, \emptyset, bc) & & \end{array}$$

L'indice di Shapley-Shubik del giocator b è $\frac{15}{27 \cdot 6} = \frac{5}{54}$.

Consiglio di sicurezza dell'Onu

p sono i giocatori con potere di veto e q gli altri

Per il gioco semplice...
...l'indice di Banzhaf è

$$\beta_p = 0.05175 \quad \beta_q = 0.00512.$$

...l'indice di Shapley è

$$\phi_p = 0.19627 \quad \phi_q = 0.00186.$$

Per il gioco con astensione...
...l'indice di Banzhaf è

$$\begin{aligned} \beta_p &= 0.02265 & \beta_q &= 0.01111 \\ \beta_p^{YA}(v) &= 0.01464 & \beta_p^{AN}(v) &= 0.00804 \\ \beta_q^{YA}(v) &= 0.01111 & \beta_q^{AN}(v) &= 0. \end{aligned}$$

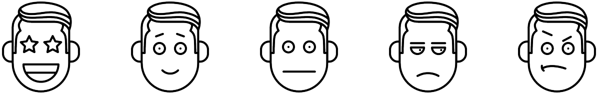
...l'indice di Shapley è

$$\phi_p = 0.16338 \quad \phi_q = 0.01830.$$

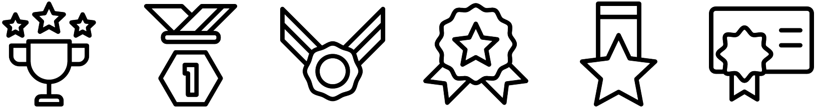
$\rightarrow$ Nel gioco con astensione il potere dei membri non permanenti è leggermente maggiore rispetto al gioco semplice, l'indice di Banzhaf in particolare mette in evidenza il ruolo diverso dei giocatori.

Un'ulteriore estensione

In caso di ancora più alternative?



$v \downarrow$



Gioco j-cooperativo

I giocatori hanno j-possibilità di voto:

$$v : j\text{-partizione} \to \mathbb{R}$$

Altri modelli di giochi con più alternative

Qualche riferimento per approfondire

- (j,k) games [Freixas&Zwicker2003]
  j-inputs and $\{v_1, \ldots, v_k\}$ ranked outcomes,
  then $v(S_1, \ldots, S_j) = v_i$
- Multichoice games [Hsiao&Raghavan1990]
- Games with n players and r alternatives [Bolger1993]
  $v(S, \Gamma)$ where Γ is a $r-$partition and $S \in \Gamma$
- Bicooperative games [Bilbao2000]
  $v(S, T)$ where players in S are voting yes players in T no, but $v(\emptyset, \emptyset) = 0$.

Bibliografia

- Bertini, C., Freixas, J., Gambarelli, G., & Stach, I. (2013). Comparing power indices. *International Game Theory Review*, 15(02), 1340004.
- Carreras, F., Freixas, J., & Puente, M. A. (2003). Semivalues as power indices. *European Journal of Operational Research*, 149(3), 676-687.
- Felsenthal, D. S., & Machover, M. (1998). *The measurement of voting power.*
- Felsenthal, D. S., & Machover, M. (1997). Ternary voting games. *International journal of game theory*, 26(3), 335-351.
- Lucchetti, R. (2011). *A Primer in Game Theory.* Società Editrice Esculapio.