

Teoria dei Giochi

Anna Torre

Almo Collegio Borromeo 19 marzo 2019 email: anna.torre@unipv.it
sito web del corso: www-dimat.unipv.it/atorre/borromeo2019.html

Teoria dei giochi evolutivi

- ▶ La moneta è sostituita dalla “Darwinian fitness”(Maynard Smith 1982);
- ▶ La teoria dei giochi evolutivi non si basa su giocatori individuali ma su strategie implementabili da due differenti categorie di individui (es femmine e maschi, dominanti e subordinati, esperti e inesperti, ecc...);
- ▶ Ogni tipo di giocatore ha un insieme di strategie che può adottare in risposta a quella degli altri.
- ▶ Se le migliori strategie sono ereditabili, i giocatori che le adottano le trasmettono alle future generazioni e quindi le generazioni successive adottano quelle strategie in numero sempre maggiore.

Teoria dei giochi evolutivi

- ▶ La soluzione “migliore” nel contesto dei giochi evolutivi è quella che ci si aspetta evolverà tramite la selezione naturale;
- ▶ In altre parole una strategia evolutivamente stabile è una strategia che non può essere rimpiazzata da una strategia rara (mutante) che può apparire casualmente;
- ▶ Un equilibrio evolutivamente stabile può essere composto da strategie pure ma anche da strategie miste.

Giochi evolutivi

- ▶ Un gabbiano ha due possibili strategie per procurarsi il pesce: pescarlo (P) e rubarlo a un altro gabbiano (R);
- ▶ È abbastanza probabile aver osservato entrambe le strategie;
- ▶ È abbastanza ovvio che se tutti i gabbiani applicassero la strategia R non ci sarebbe nessun pesce da rubare;
- ▶ Se un certo numero applicano la strategia P, la strategia R diventa conveniente perché meno faticosa.

Come è fatta la bimatrice?

| $I \backslash II$ | P | R |
|-------------------|--------------------|--------------------|
| P | $(h(P,P), h(P,P))$ | $(h(P,R), h(R,P))$ |
| R | $(h(R,P), h(P,R))$ | $(h(R,R), h(R,R))$ |

dove $h(A, B)$ dipende da fattori come la pescosità del corso d'acqua, la numerosità dei gabbiani, la presenza di altri predatori, ecc....

Giochi evolutivi

- ▶ La matrice di un gioco evolutivo ha dunque una particolarità: è simmetrica, cioè $f(A, B) = g(B, A)$ per ogni coppia di strategie A, B ;
- ▶ In generale però $f(A, B)$ è diverso da $f(B, A)$.

Giochi simmetrici: formalizzazione

- ▶ Un gioco non cooperativo a due giocatori in forma strategica (X, X, f, g) si dice simmetrico se esiste una funzione h tale che $f(x, y) = h(x, y)$ e $g(x, y) = h(y, x)$;
- ▶ In un gioco simmetrico gli spazi di strategie dei due giocatori sono gli stessi.

Strategie evolutivamente stabili.

- ▶ Una strategia evolutivamente stabile è una strategia che non viene rimpiazzata da una strategia (mutante) che compare nella popolazione.
- ▶ Definizione (intuitiva) di strategia evolutivamente stabile:
Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se, quando in una popolazione di animali che adottano tutti la strategia b^* avviene una qualunque mutazione e questa mutazione fa sì che una piccola percentuale della popolazione adotti una strategia b diversa da b^* , allora l'utilità attesa di un mutante è minore di quella di un non mutante.

Considerazioni sulle strategie evolutivamente stabili

- ▶ Sia ε la probabilità (frequenza relativa) del mutante. L'utilità attesa del non mutante b^* è

$$u(b^*) = (1 - \varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b^*, b)$$

mentre l'utilità attesa del mutante b è

$$u(b) = (1 - \varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b);$$

- ▶ La strategia b^* è evolutivamente stabile se e solo se $u(b) < u(b^*)$ per ogni strategia b e per ogni numero ε sufficientemente piccolo.

Considerazioni sulle strategie evolutivamente stabili

Dunque deve esistere un numero δ tale che per ogni ε nell'intervallo $[0, \delta]$ si abbia:

$$(1) \quad u(b) = (1-\varepsilon)f(b, b^*) + \varepsilon f(b, b) < u(b^*) = (1-\varepsilon)f(b^*, b^*) + \varepsilon f(b^*, b)$$

da cui, passando al limite per ε tendente a 0, si ha

$$a) \quad f(b, b^*) \leq f(b^*, b^*) \text{ per ogni } b$$

che è la definizione di equilibrio di Nash.

Considerazioni sulle strategie evolutivamente stabili

Questo non basta perchè se per qualche b vale

$$f(b, b^*) = f(b^*, b^*)$$

la condizione (1) diventa

$$\varepsilon f(b, b) < \varepsilon f(b^*, b)$$

e quindi

$$b) f(b, b) < f(b^*, b)$$

Equilibri evolutivi

Le condizioni a) e b) implicano ovviamente la (1).

- ▶ **DEFINIZIONE** formale di strategia evolutivamente stabile.
Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Una strategia b^* si dice evolutivamente stabile se (b^*, b^*) è un equilibrio di Nash e se inoltre per ogni strategia $b \neq b^*$ tale che $f(b, b^*) = f(b^*, b^*)$ allora $f(b, b) < f(b^*, b)$;
- ▶ Sia (X, X, f, g) un gioco simmetrico. Un equilibrio di Nash formato da una coppia di strategie (b^*, b^*) tale che b^* è evolutivamente stabile, si dice equilibrio evolutivo;
- ▶ Un equilibrio evolutivo si ottiene per una coppia di strategie uguali.

Il gioco falchi-colombe

Supponiamo che in una popolazione di animali della stessa specie si verificano delle contese tra due animali per la conquista della preda e poniamo uguale a 1 l'utilità che un animale ottiene conquistando una preda. Supponiamo poi che l'animale abbia a disposizione solo due strategie: una aggressiva Falco e una non aggressiva Colomba. Se entrambi gli animali si comportano da C si dividono la preda e ottengono $\frac{1}{2}$ ciascuno. Se uno si comporta da C e l'altro da F , F prende 1 e C 0, mentre se entrambi si comportano da F prendono ciascuno $\frac{1}{2} - c$ essendo c il costo del combattimento. In tabella:

Il gioco falchi-colombe

| | | |
|-------------------|------------------|--------------|
| $I \backslash II$ | F | C |
| F | $(1/2-c, 1/2-c)$ | $(1, 0)$ |
| C | $(0, 1)$ | $(1/2, 1/2)$ |

Strategie pure

Cerchiamo gli equilibri di Nash in strategie pure:

- ▶ se $\frac{1}{2} - c > 0$ cioè $c < \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo ma inefficiente.
- ▶ se $\frac{1}{2} - c = 0$ cioè $c = \frac{1}{2}$, la strategia F è evolutivamente stabile e (F, F) è un equilibrio di Nash evolutivo, ma ci sono altri due equilibri di Nash (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi. La strategia F è l'unica evolutivamente stabile.
- ▶ se $\frac{1}{2} - c < 0$ cioè $c > \frac{1}{2}$, il gioco ha due equilibri (F, C) e (C, F) che non sono evolutivi.

Strategie miste

- ▶ Per entrambi i giocatori una strategia mista è un numero p compreso tra 0 e 1 che rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia F mentre $1 - p$ rappresenta la probabilità che egli giochi la strategia C.
- ▶ Sia p la strategia del primo giocatore e q la strategia del secondo.
- ▶ Si ha:

$$f(p, q) = g(q, p) = h(p, q) = \left(\frac{1}{2} - c\right)pq + p(1 - q) + \frac{1}{2}(1 - p)(1 - q) = \frac{1}{2}(p - q + 1) - cpq = \left(\frac{1}{2} - cq\right)p - \frac{1}{2}q + \frac{1}{2}$$

- ▶ se $c < \frac{1}{2}$. L'intersezione delle due curve di miglior risposta dà l'unico equilibrio di Nash $(1, 1)$ che corrisponde a giocare sempre la strategia F ed è l'equilibrio di Nash in strategie pure già noto e che è anche evolutivo.
- ▶ se $c = \frac{1}{2}$, $(1, 1)$ e tutti i punti del tipo $(p, 1)$ e $(1, q)$ con p e q qualsiasi sono equilibri di Nash, ma solo $(1, 1)$ è evolutivo.
- ▶ se $c > \frac{1}{2}$ si trovano tre equilibri di Nash $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$. I primi due equilibri non sono evolutivi perchè non sono simmetrici, mentre il terzo è evolutivo. La strategia $\frac{1}{2c}$ è l'unica strategia evolutivamente stabile. Quindi in questo caso ci possiamo aspettare, come risultato della selezione naturale, non una popolazione di tutti F o di tutte C , ma una popolazione di individui che adottano la strategia mista $p = \frac{1}{2c}$.

Equilibrio in strategie miste

- ▶ La strategia di miglior risposta a q è quella che realizza $\max_p u(p, q) = \max_p (-cq + \frac{1}{2})p - \frac{q}{2} + \frac{1}{2}$,
- ▶ La strategia di miglior risposta a p è quella che realizza $\max_q u(q, p) = \max_q (-cp + \frac{1}{2})q - \frac{p}{2} + \frac{1}{2}$.
- ▶ Queste due multifunzioni si intersecano nei punti $(0, 1)$, $(1, 0)$ e $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$.
- ▶ $(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c})$ è evolutivo. $\frac{1}{2c}$ in questo caso è effettivamente una probabilità in quanto $c > \frac{1}{2}$ e quindi $0 < \frac{1}{2c} < 1$.
- ▶ $u(\frac{1}{2c}, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$
- ▶ $u(p, \frac{1}{2c}) = \frac{2c-1}{4c}$ per ogni valore di p .

Equilibrio in strategie miste

- ▶ Occorre che sia verificata la condizione

$$u(p, p) < u\left(\frac{1}{2c}, p\right)$$

- ▶ $u(p, p) = \frac{1-2cp^2}{2}$,
 $u\left(\frac{1}{2c}, p\right) = \frac{1-4cp+2c}{4c}$

si ottiene che $u(p, p) < u\left(\frac{1}{2c}, p\right)$ se e solo se $(2cp - 1)^2 > 0$ che è equivalente a $p \neq \frac{1}{2c}$

Dunque in questo caso l'equilibrio è evolutivo.