Il Modello di Cournot (1838)

- Antoine Augustin Cournot (1801-1877) è stato un **matematico** e **economista** francese dell'Ottocento
- Considerato un maestro della teoria economica (a lui dobbiamo l'analisi del monopolio che si insegna ancora oggi in tutto il mondo), e **un precursore della teoria dei giochi**, il suo lavoro in economia è stato sostanzialmente ignorato all'epoca (con suo grande rammarico).

Il Duopolio di Cournot

- Il suo modello di **concorrenza duopolistica** si è dimostrato non solo interessante di per sé, ma adattabile anche ad ambiti molto diversi dal-l'economia (inquinamento, scelte politiche).
- Reinterpretato modernamente si tratta di **un gioco in scelte simultanee** tra **due imprese** che sono le uniche produttrici su di un mercato, e che mirano a massimizzare i loro profitti.
- Ciascuna impresa deve scegliere strategicamente la propria **quantità** (un qualunque numero non negativo).

Il Duopolio di Cournot

- Ovvero, assumendo *omogeneità del prodotto*, immagina che le (due) imprese scelgano *simultaneamente* **le loro quantità q_1 e q_2**, nell'ipotesi che il **prezzo p** sarà quello che permette al mercato di assorbirle. Cioè:
  - $p = P(q_1 + q_2)$,
- dove $P(q)$ è la curva (inversa) di domanda del mercato, e $q = q_1 + q_2$ la quantità prodotta *complessivamente*.

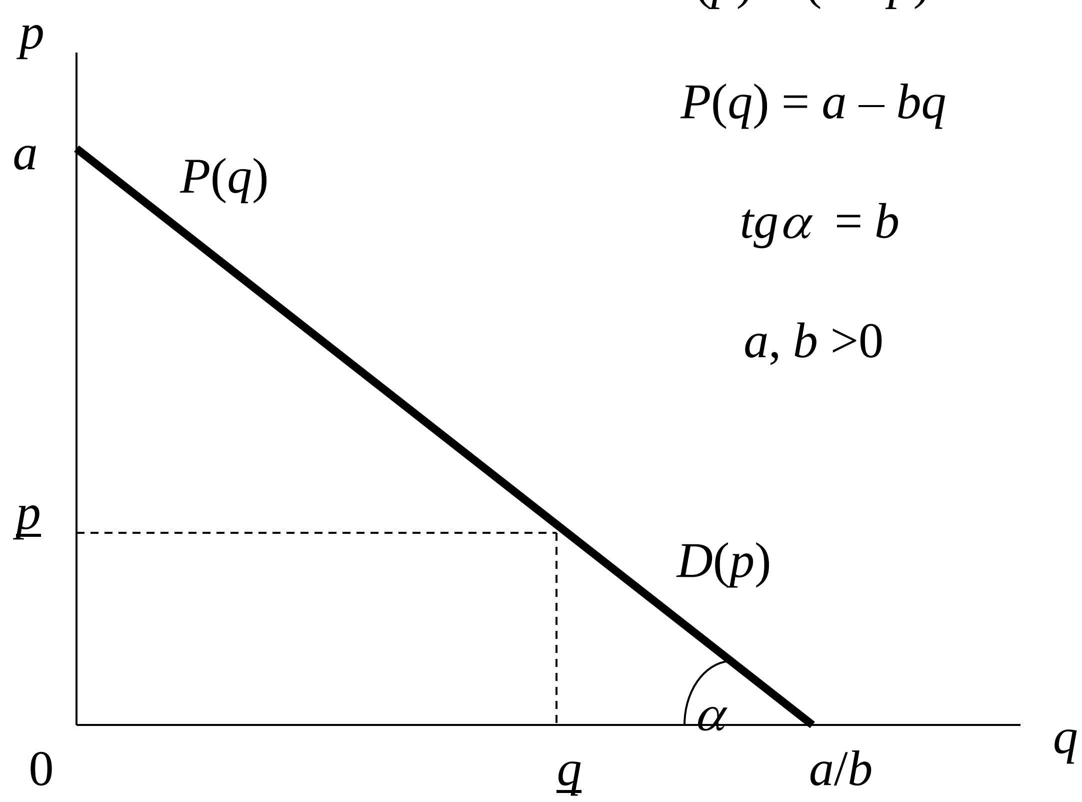
Gli elementi fondamentali di un mercato: la domanda *lineare*

$D(p) = (a - p)/b$

$P(q) = a – bq$

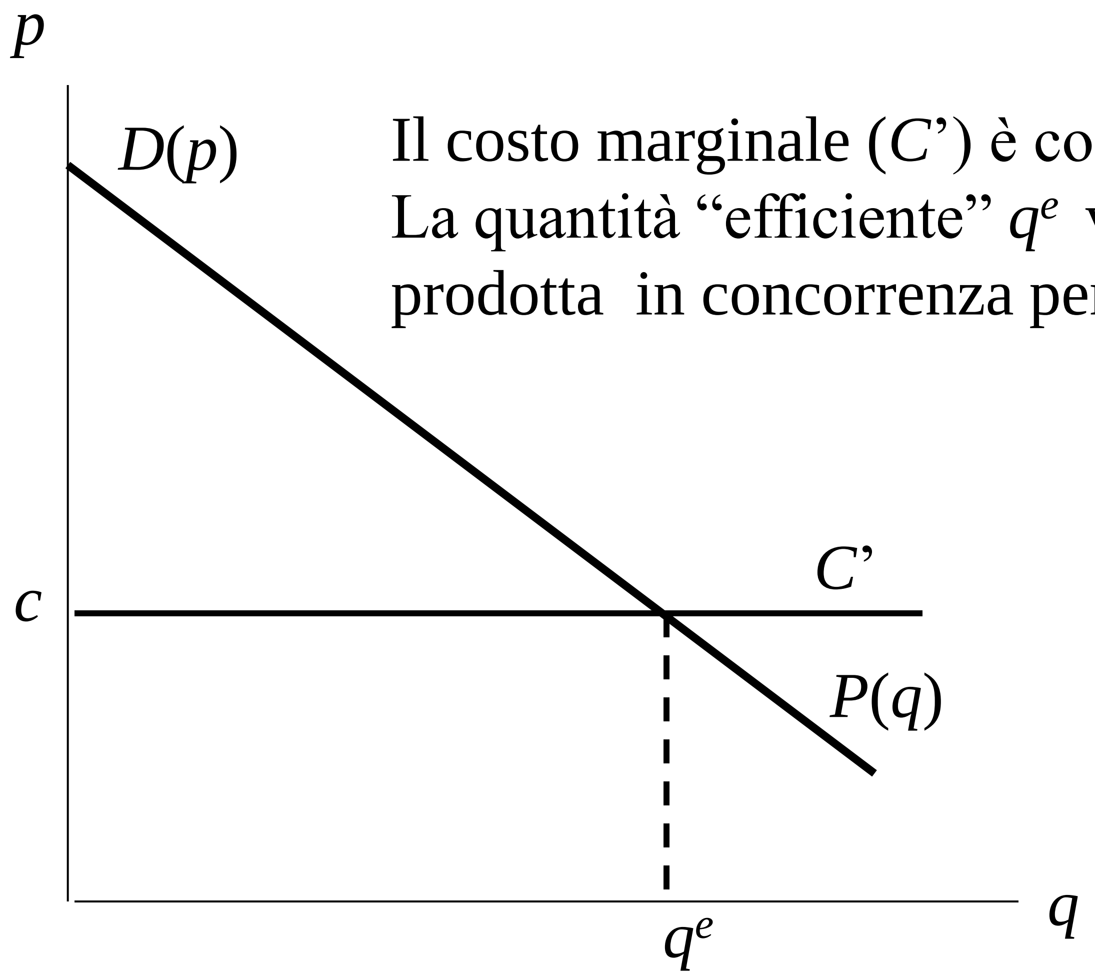
$tg\alpha = b$

$a, b > 0$

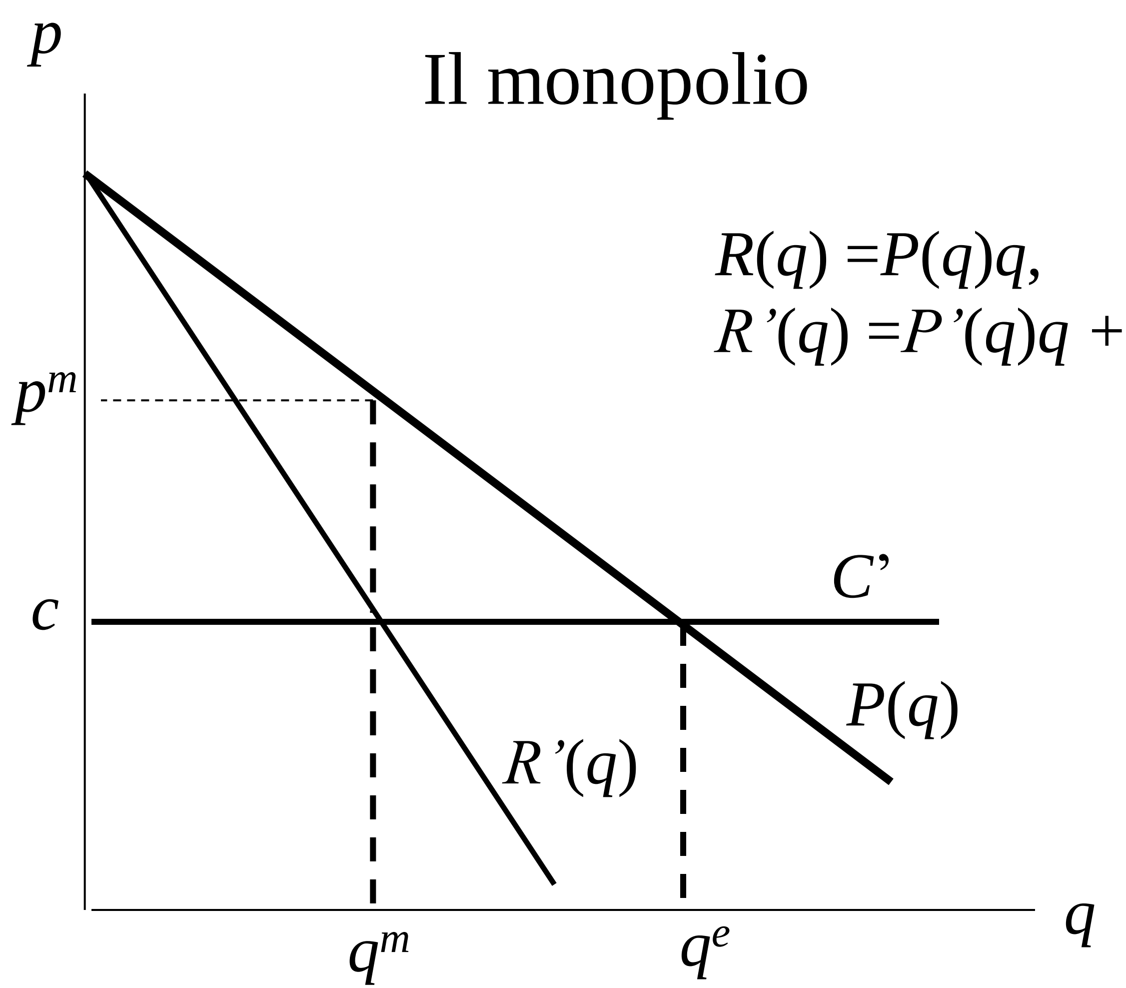


Domanda e **Costo** (Offerta) *Lineari*

Il costo marginale (C') è costante.
La quantità "efficiente" q^e verrebbe prodotta in concorrenza perfetta.



Domanda, Costo e Ricavo marginali *Lineari*



Duopolio di Cournot: *continuazione*

Nella forma normale del gioco di Cournot:

- a) le imprese 1 e 2 (*simmetriche* nel caso base) scelgono simultaneamente q_1 e q_2;
- b) le funzioni di *payoff* per ciascuna impresa sono date dal valore del loro profitto (**Ricavi – Costi**): ($i, j = 1,2, i \neq j$)
  - $\pi_i(q_i, q_j) = P(q_1 + q_2)q_i - cq_i$

  (assumendo costi marginali $c = C'(q_i)$ costanti e identici).

Per determinare l'equilibrio di Nash del gioco, si consideri la funzione di risposta ottima ("**curva di reazione**") dell'impresa *i*, $q_i*(q_j)$:

Se l'impresa *i* si aspetta la produzione della quantità q_j da parte del suo concorrente, il suo comportamento <u>ottimale</u> è quello di un *monopolista* che abbia come curva di domanda la **domanda residuale** data da:

$$\underline{P}_i(q_i) = P(q_i + q_j),$$

e dunque "**profitto marginale**" pari a:

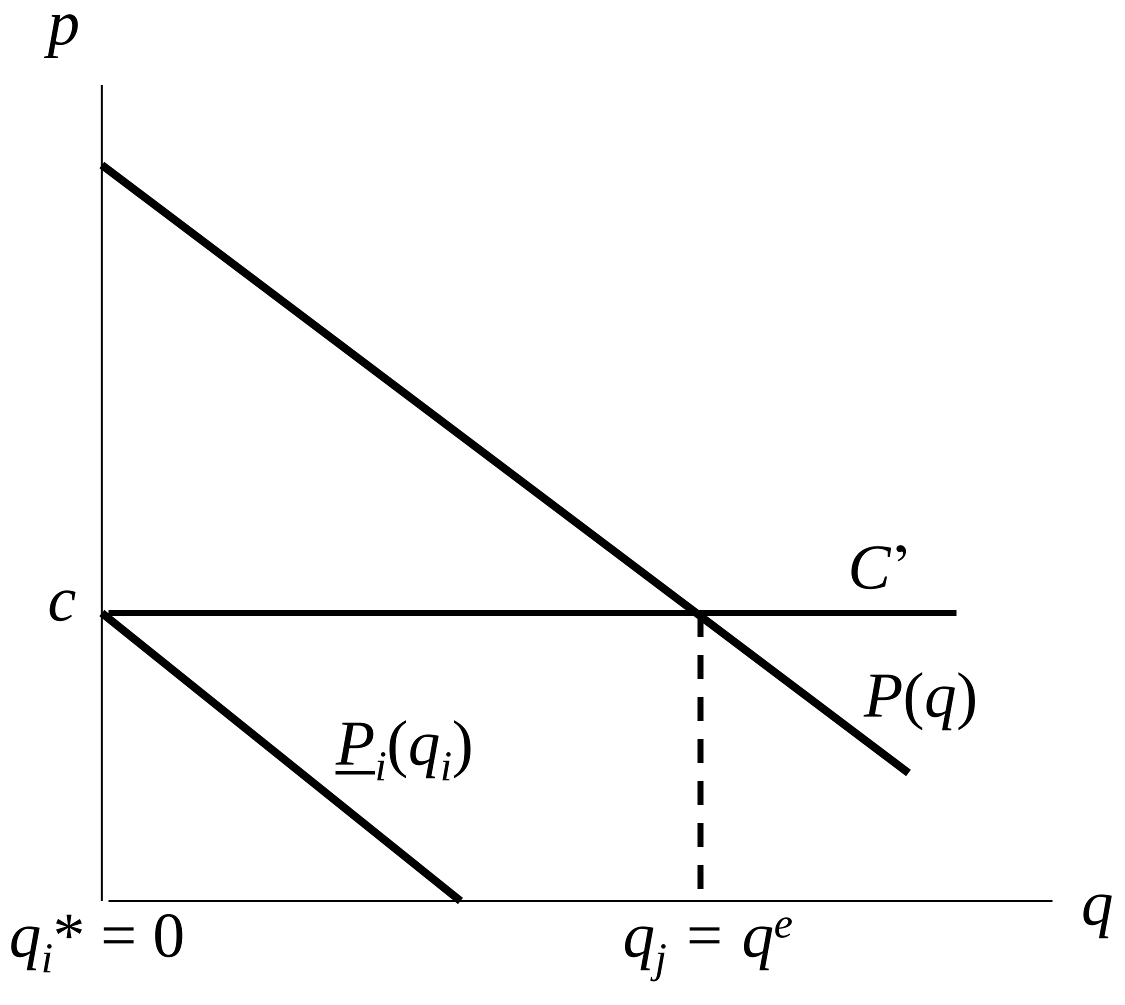
$$\partial\pi_i/\partial q_i = \underline{P}_i'(q_i)q_i + \underline{P}_i(q_i) - c = P'(q)q_i + P(q) - c.$$

Si notino i due casi particolari:

- 1) se $q_j = 0$ $\rightarrow$ $q_i^* = q^m$, poiché $\underline{P}_i(q_i) = P(q_i)$, dove $P'(q^m)q^m + P(q^m) - c = 0$.

- 2) se $q_j = q^e$ (dove $P(q^e) = c$) $\rightarrow$ $q_i^* = 0$ (poiché $\underline{P}_i(0) = c$)
- Il risultato (2) dipende dall'assunzione di costi marginali costanti, ed è illustrato nel prossimo grafico.

Ex: $q_i^* = 0$ è la risposta ottimale a $q_j = q^e$.



L'aumentare di q_j diminuisce <u>necessaria-mente</u> la curva di domanda residuale di *i*.

- Ciò suggerisce che la *funzione* $q_i^*(q_j)$ sia decre-scente (cosiddetto **caso dei sostituti strategici**), compresa tra un valore massimo pari alla quantità di monopolio e un valore minimo nullo.
- Tale congettura risulta confermata nel caso, <u>cui restringiamo la nostra attenzione</u>, in cui *anche* la domanda risulti lineare.
- Tuttavia, se la domanda non fosse concava (e la funzione di costo non fosse convessa), tale risulta-to non sarebbe garantito.

Cournot: il caso **lineare** ($P(q) = a - bq$, $a > c$)

- $\pi_i(q_i, q_j) = R_i(q_i,q_j) - C(q_i) = P(q_i + q_j)q_i - cq_i$

La condizione del primo ordine per la massimizzazione dei profitti di *i* conferma che una risposta ottima alla quantità q_j della concorrente implica che il "ricavo marginale", $\partial R_i/\partial q_i = P'(q)q_i + P(q)$, sia pari al costo marginale, c:

- $\partial \pi_i/\partial q_i = P'(q)q_i + P(q) - c = 0.$

Il caso lineare: *continuazione*

- Sostituendo i parametri della domanda si ottiene:
  - $- bq_i + a - bq_i - bq_j - c = 0$
  - $\downarrow$
  - $q_i{*}(q_j) = (a - c)/(2b) - q_j/2$
- (si noti che la condizione del secondo ordine $\partial^2\pi_i/\partial q_i^2 = P''(q)q_i + 2P'(q) = \partial^2 R_i/\partial q_i^2 = - 2b < 0$ è soddisfatta, indicando che la funzione di profitto è concava).

Il caso lineare: continuazione

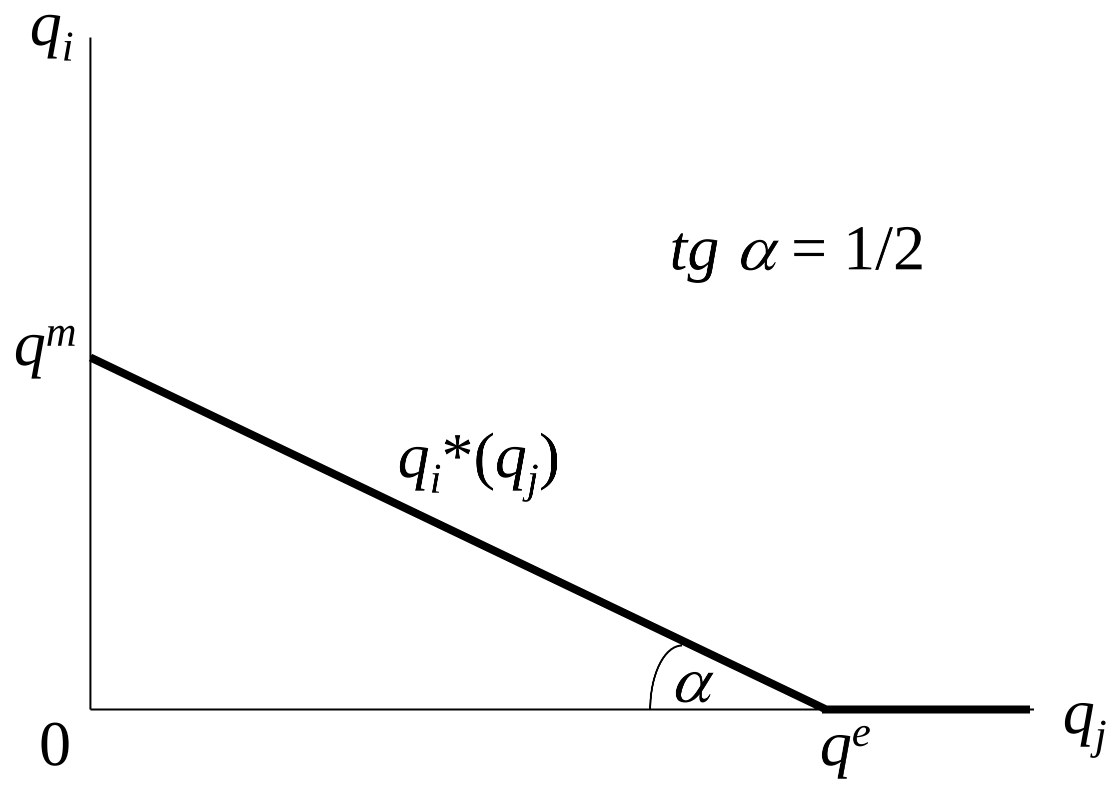
- Si noti che :
  - $dq_i^*/dq_j = -\frac{1}{2}$,

  - $q_i^*(0) = (a - c)/(2b) = q^m$,

  - $q_i^*(q^e) = 0$

(dove $q^e = (a - c)/b$).

Il caso lineare *graficamente*:



$q_i^*(q_j)$ è la *curva di reazione* di i.

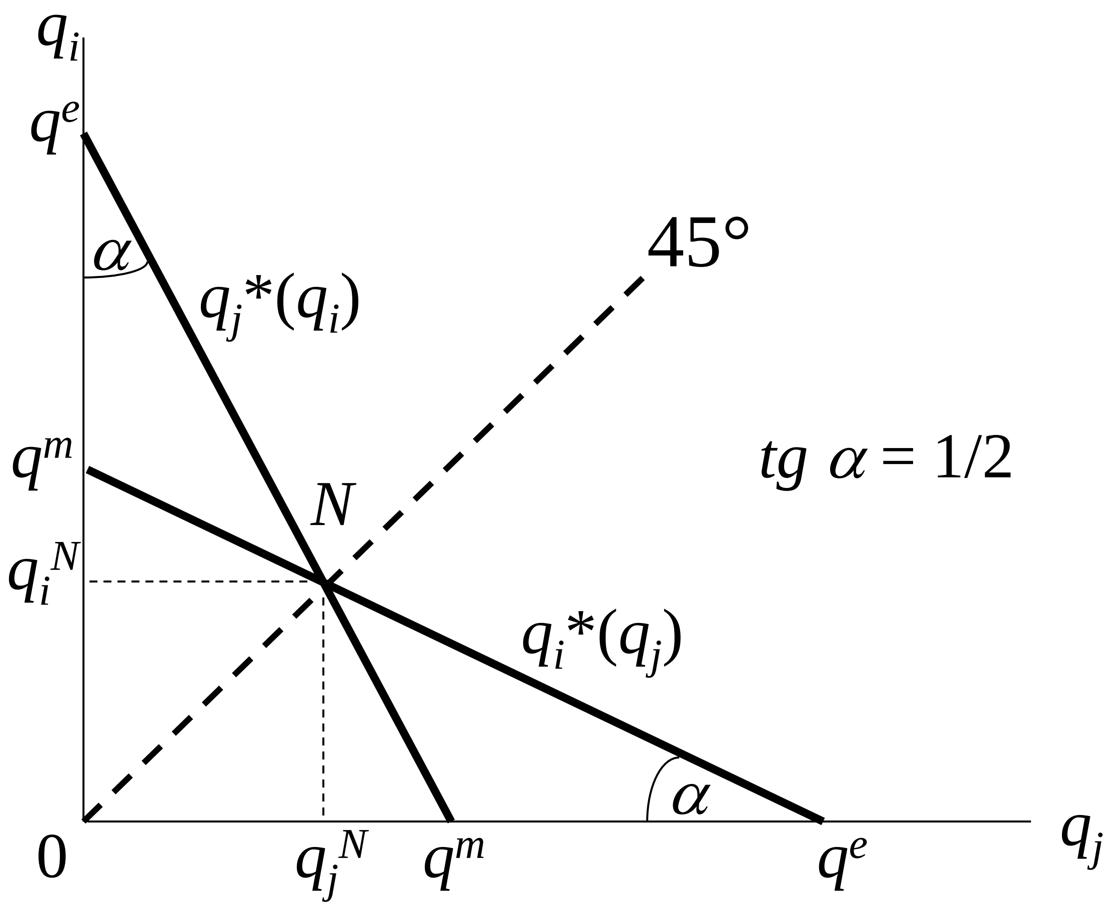
L'equilibrio di Nash del *gioco di Cournot* può essere localizzato come **intersezione delle curve di reazione**.

Ovvero, un "**Equilibrio di Cournot**" è costituito da una coppia di quantità (q_1, q_2) tali che (condizione di *punto fisso*):

$$q_1 = q_1^*(q_2) \quad \text{e} \quad q_2 = q_2^*(q_1)$$

(ovviamente, le curve di reazione saranno simmetriche se lo sono le imprese, e simmetrico sarà l'equilibrio, che può pertanto essere identificato anche attraverso la condizione $q_i^N = q_i^*(q_i^N)$, dove l'apice N indica i valori di equilibrio).

Graficamente (caso lineare):



N è l'Equilibrio di Nash del gioco di Cournot.

Il caso lineare - conclusione:

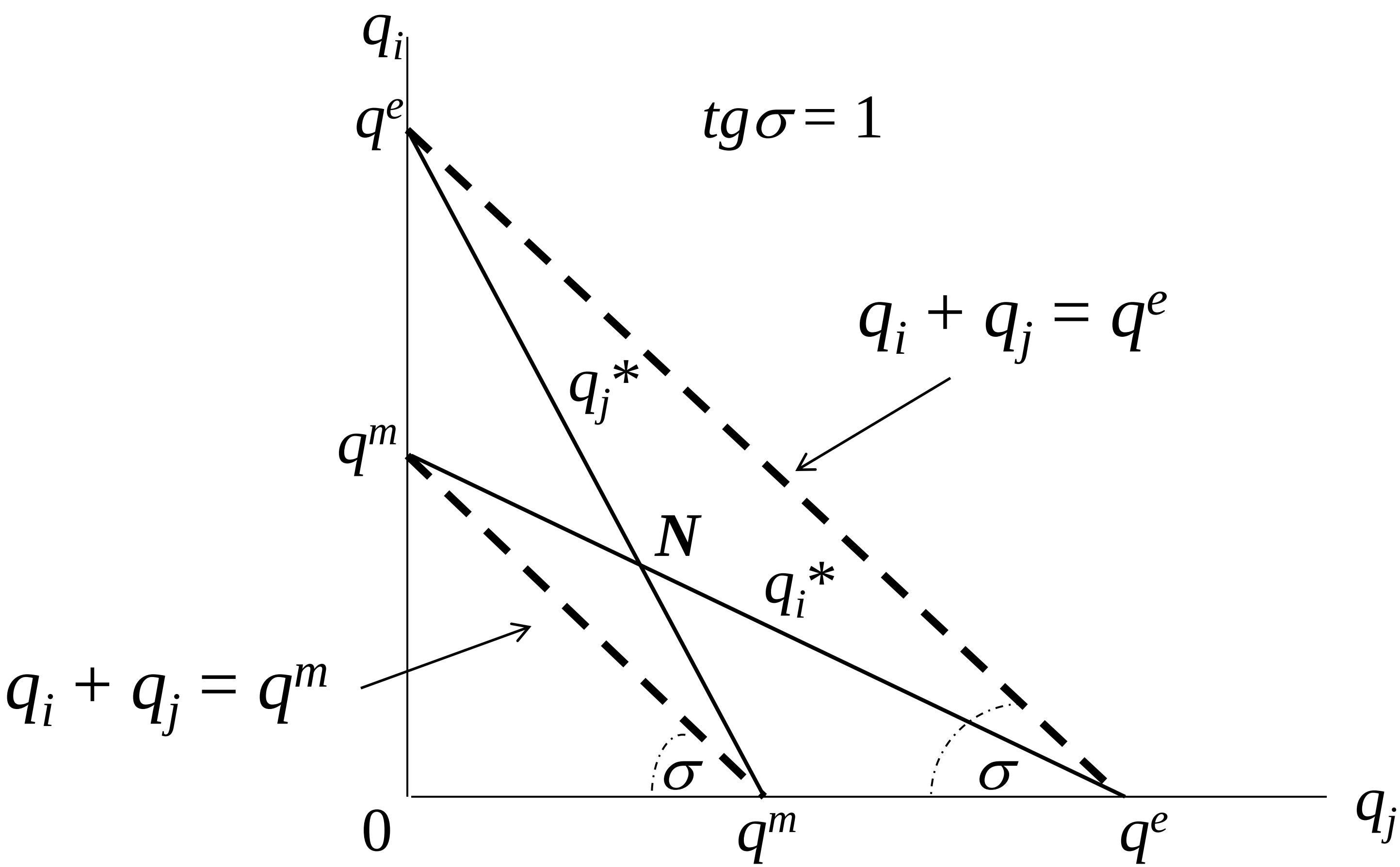
Risolvendo il sistema dato dalle due curve di reazione si ottiene in effetti facilmente che:

- $q_1^N = (a - c)/(3b) = q_2^N$,

- $q^N = q_1^N + q_2^N$, $p^N = P(q^N) = (a + 2c)/3$.

- Perciò:
  - $q^e > q^N > q^m$ e $p^m > p^N > p^e = c$.

Graficamente: $q^e > q^N > q^m$.



.

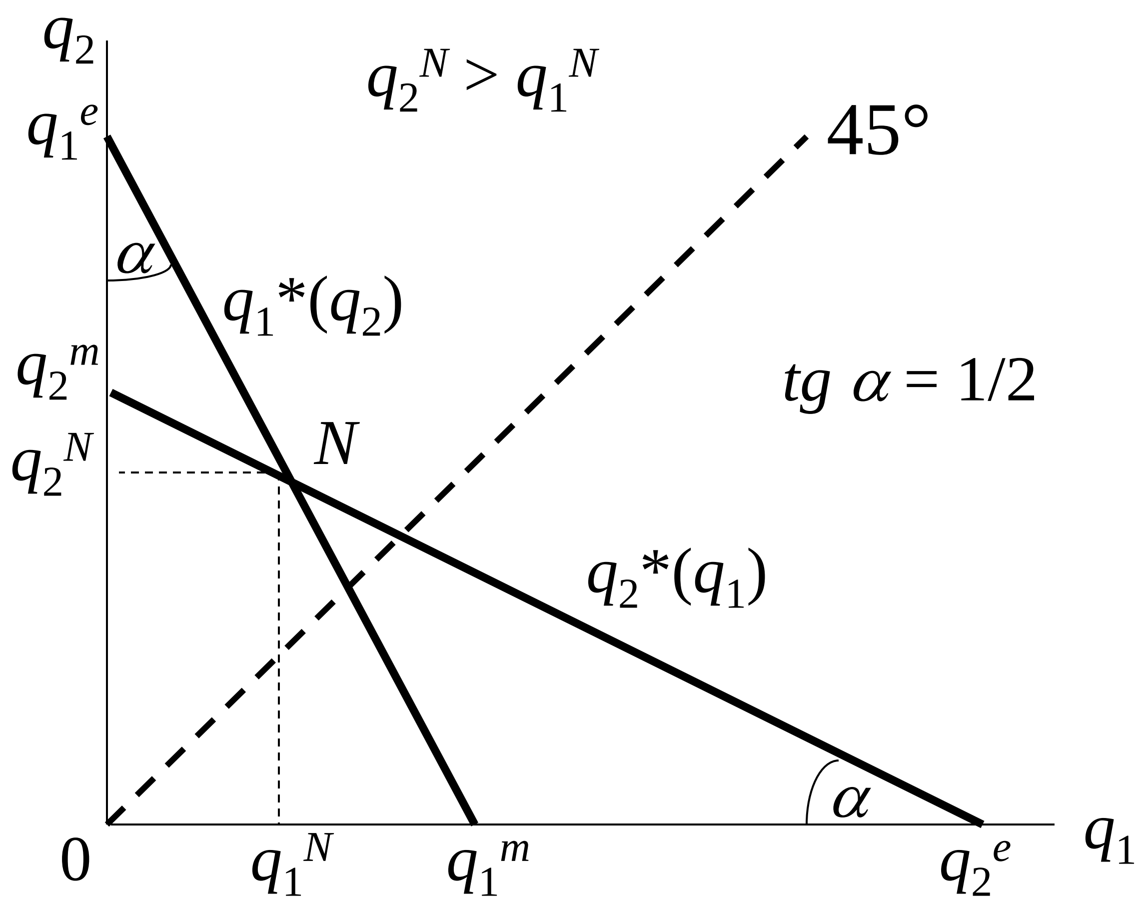
Modello di Cournot: *estensioni*

- Il modello duopolistico sopra presentato si estende comunque facilmente al caso di *imprese asimmetriche* (e ai costi marginali *crescenti*).
- Si estende poi al caso di $n > 2$ imprese.
- Si estende anche al caso di funzioni di domanda non lineari, e funzioni di costo non convesse, ma in tali casi può essere difficile mostrare l’esistenza della soluzione di Cournot, la cui unicità non può essere garantita nel caso generale (n imprese).

Imprese **asimmetriche** – il caso lineare

- Se $C_1' = c_1 > c_2 = C_2'$, risultati simili ai precedenti si ottengono ri-derivando le curve di reazione e mettendole a sistema.
- In particolare, dalla FOC:
  - $\partial\pi_i/\partial q_i = P'(q)q_i + P(q) - c_i = 0,$
- si ottiene immediatamente che:
  - $q_i^*(q_j) = (a - c_i)/(2b) - q_j/2.$

Imprese <u>asimmetriche</u> (caso lineare): $p_2{}^m > c_1 > c_2$



$q_2{}^m < q_1{}^e$

Imprese asimmetriche – il caso lineare continuazione

- Si ottiene facilmente:

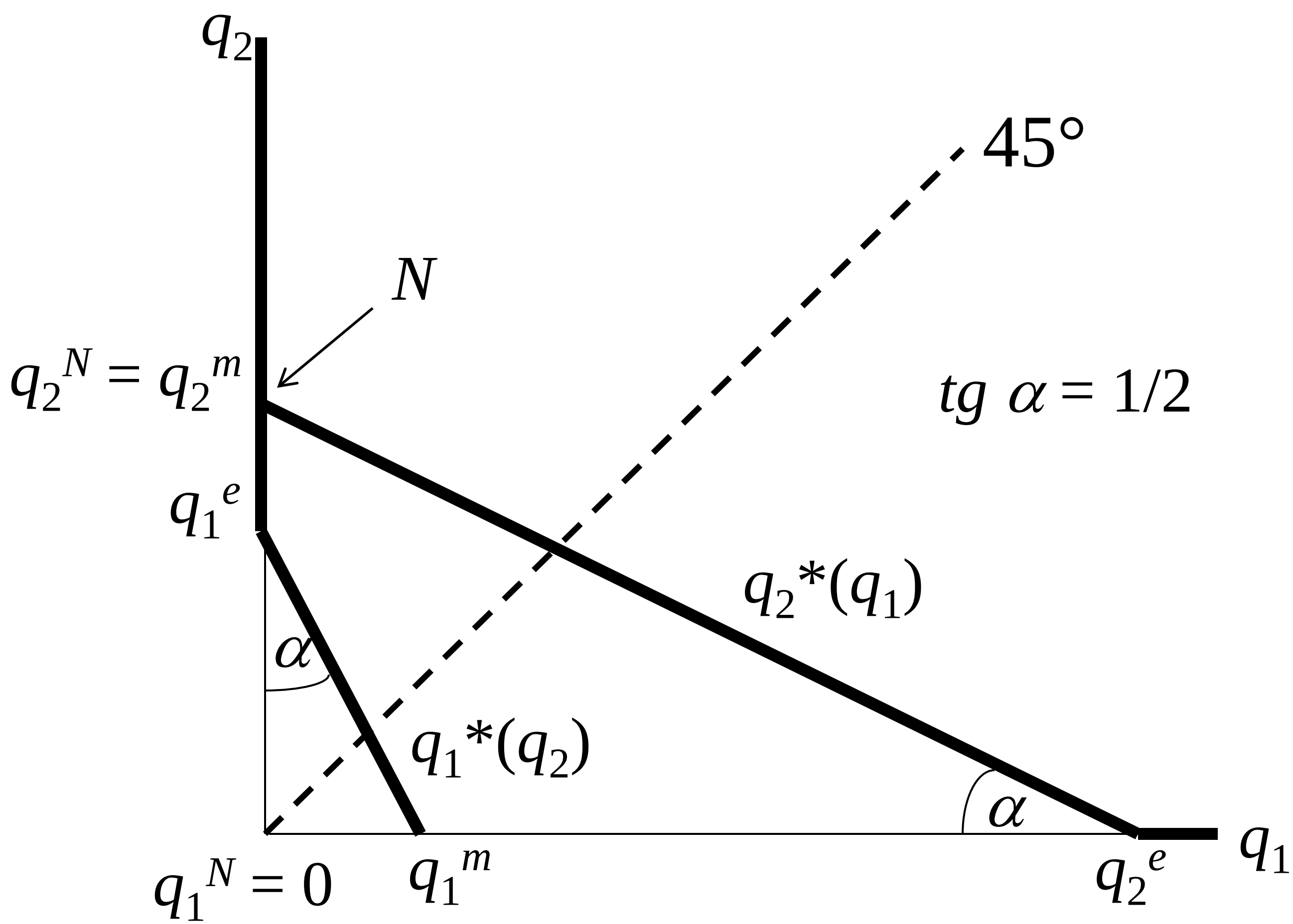
  - $q_i^N = (a + c_j - 2c_i)/3b$,
  - $q^N = (2a - c_1 - c_2)/3b = 2(a - (c_1 + c_2)/2)/3b$,
  - $p^N = P(q^N) = (a + c_1 + c_2)/3$,
  - $\pi_i^N = (p^N - c_i)q_i^N = (a + c_j - 2c_i)^2/(9b)$.

Imprese asimmetriche – il caso lineare

- Si noti graficamente che l'equilibrio fin qui descritto richiede che $q_2^m \leq q_1^e$, ovvero:
  - $p_2^m = (a + c_2)/2 \geq c_1$.
- Se invece fosse $c_1 > p_2^m$, ovvero le differenze tra i costi marginali fossero così grandi da "spiazzare" del tutto l'impresa "meno efficiente", allora si otterrebbe:
  - $q_1^N = 0$, $q_2^N = (a - c_2)/2b = q_2^m$

come indicato nel grafico seguente (si rammenti che, nel caso lineare, $q_i^*(q_j) = 0$ <u>se</u> $q_j \geq q_i^e$).

Imprese asimmetriche (caso lineare): $c_1 > p_2^m$



$q_2^m > q_1^e$

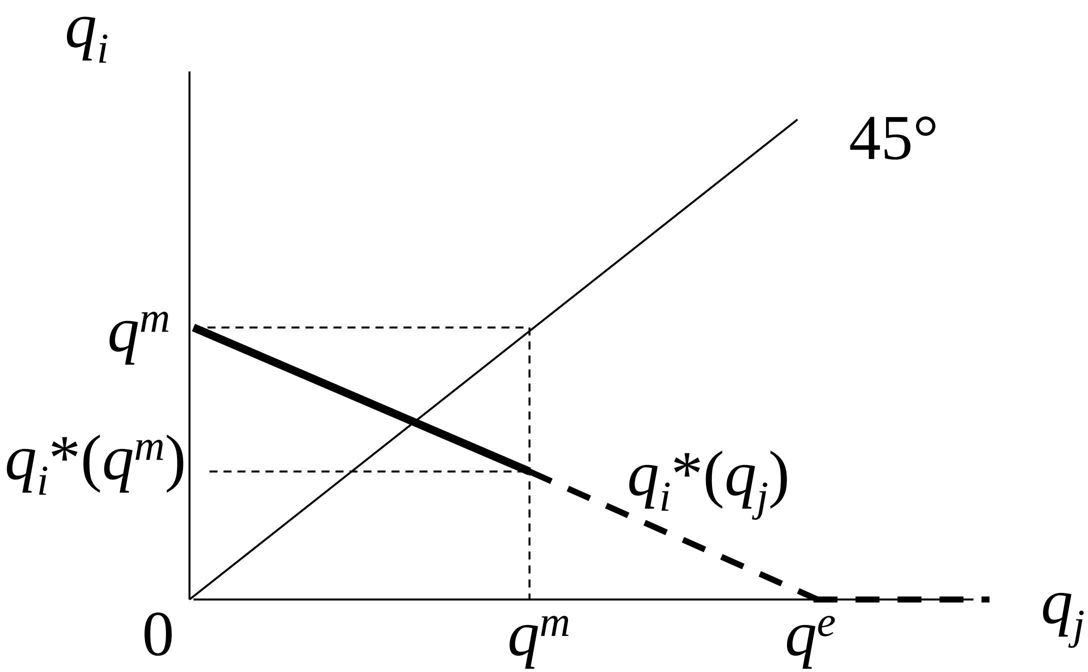
Una giustificazione dell’equilibrio nel *duopolio* di Cournot (caso *lineare*, *simmetrico*).

- La curva di reazione si può utilizzare per definire il seguente processo di eliminazione iterativa di strategie **dominate**.
- Si noti che, essendo il gioco simmetrico, ogni *eli-minazione* valida per il giocatore *i* si applicherà a entrambi i giocatori.
- **Passo 1**: ogni scelta di produrre **più** della quantità di monopolio è dominata dall’opzione per que-st’ultima quantità.

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot (lineare, simmetrico).

- **Passo 2**: dunque ogni scelta di produrre **meno** di:
    - $q_i^*(q^m) = (a - c)/(2b) - q^m/2$
        - $= (a - c)/(4b) = q^m/2$
- sarà dominata da tale quantità.
- L'argomento è illustrato nel grafico successivo.

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot (lineare, simmetrico). **Passo 2**

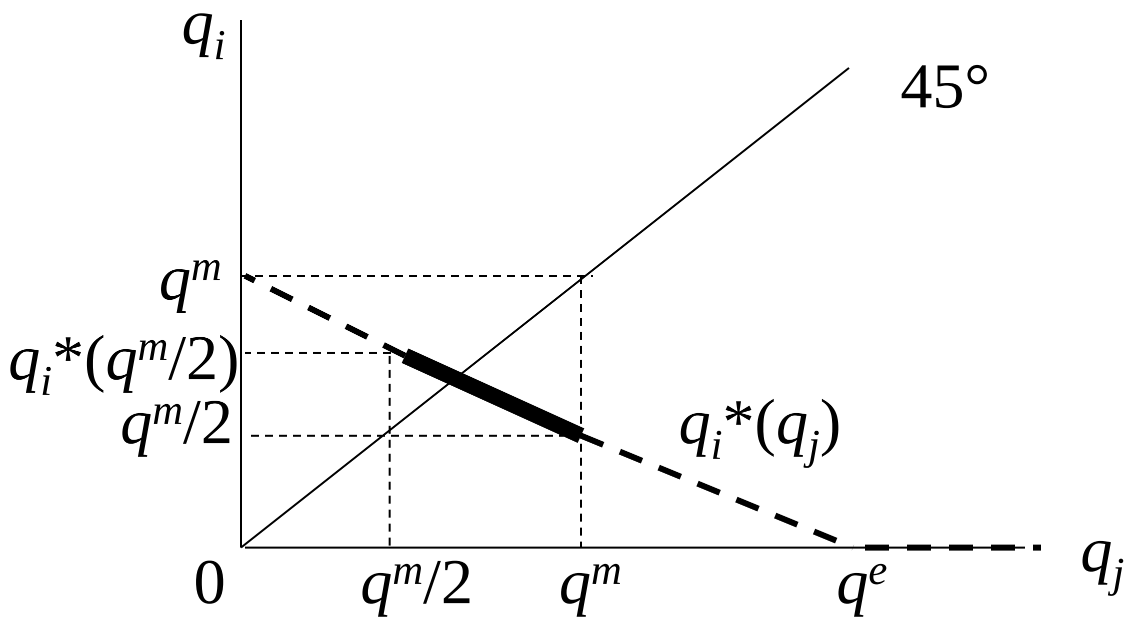


Intervallo “rimanente”: $q_i \in [q^m/2, q^m]$

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot - *continuazione*

- **Passo 3**: a questo punto dunque ogni scelta di produrre **più** di:
    - $q_i^*(q^m/2) = (a - c)/(2b) - q^m/4$
        - $= 3(a - c)/(8b) = 3q^m/4$
- sarà dominata da tale quantità.
- L'argomento è nuovamente illustrato nel grafico successivo.

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot (lineare, simmetrico). **Passo 3**

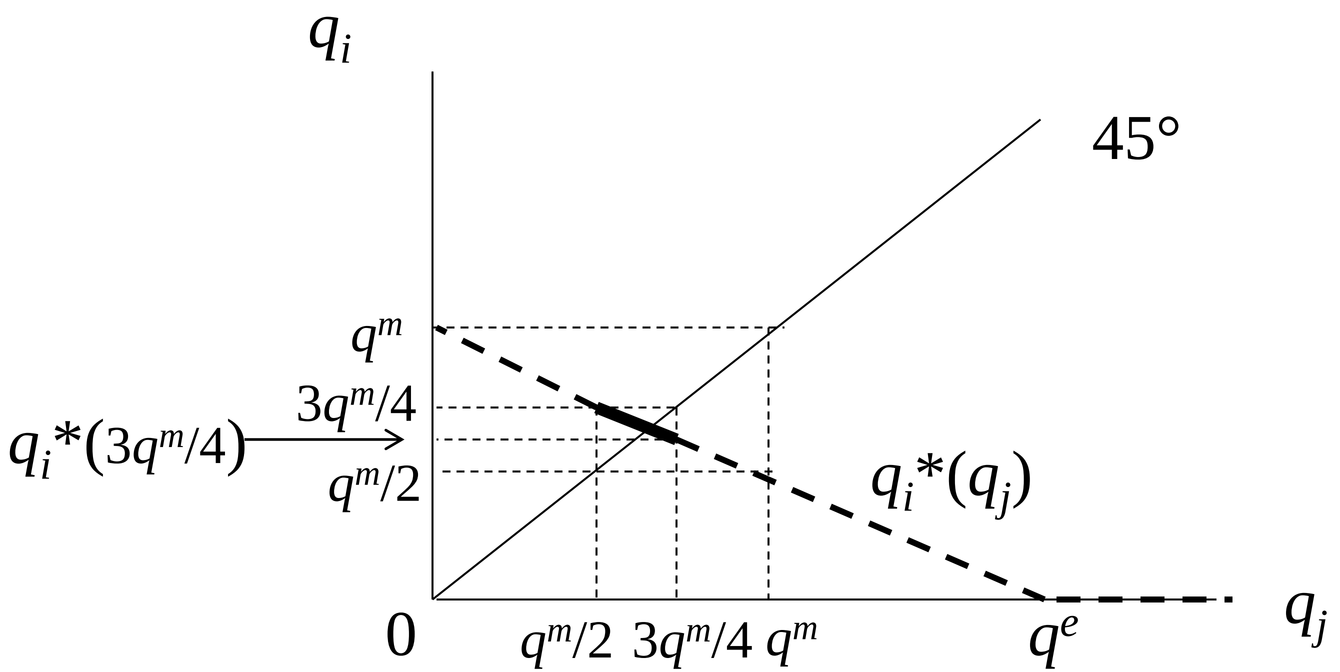


Intervallo "rimanente": $q_i \in [q^m/2, 3q^m/4]$

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot - continuazione

- **Passo 4**: perciò ogni scelta di produrre **meno** di:
    - $q_i*(3q^m/4) = (a - c)/(2b) - 3q^m/8$
        - $= 5(a - c)/(16b) = 5q^m/8$
- sarà dominata da tale quantità.
- Si veda il grafico successivo.

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot (lineare, simmetrico). **Passo 4**



Intervallo “rimanente”: $q_i \in [5q^m/8, 3q^m/4]$

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot - *conclusione*

- E' facile immaginare (e si può provare) che il processo continuerà sino a ridurre l'insieme delle strategie *non* dominate all'unico valore θq^m corrispondente ad un *punto fisso* della curva di reazione:
  - $\theta q^m = q_i^*(\theta q^m) = (a - c)/(2b) - \theta q^m/2,$
- cioè
  - $\theta q^m = (a - c)/(3b) = q_i^N,$
- ovvero $\theta = 2/3$.

Eliminazione di strategie dominate nel duopolio di Cournot - conclusione

- L'equilibrio del duopolio di Cournot è dunque anche l'equilibrio in strategie dominanti dopo l'iterativa eliminazione delle strategie dominate del gioco di Cournot (nel caso lineare).
- q_i^N corrisponde in effetti all'unica strategia di produzione "non dominata".

Consideriamo un **Oligopolio à la Cournot** con $n \geq 2$ imprese (simmetriche):

Quello che conta per ciascuna impresa è la quantità prodotta *complessivamente* dai suoi competitori, che sono (n - 1).

In particolare, indicando con q_{-i} la quantità prodotta dalle imprese diverse da i, possiamo scrivere:

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = P(q_i + q_{-i})q_i - C(q_i),$$

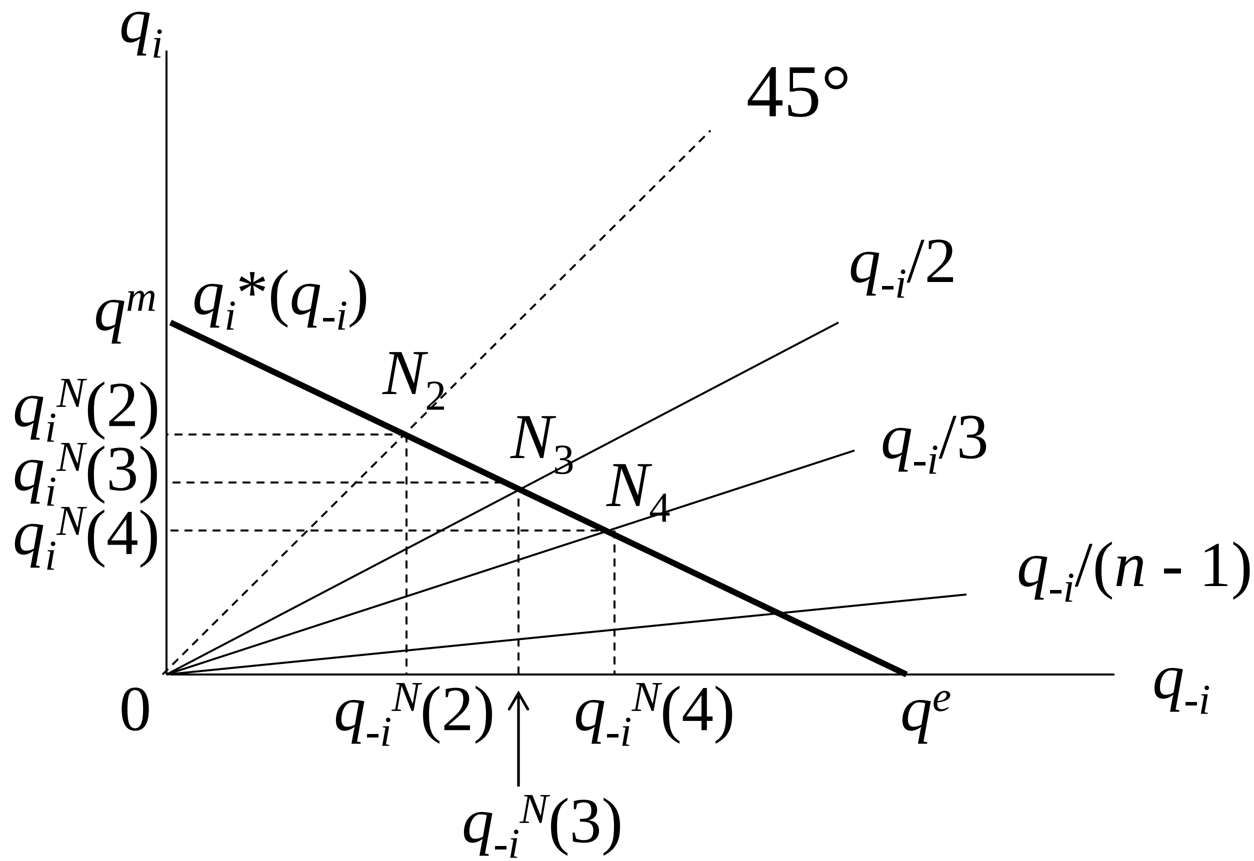
dove $q_{-i} = \Sigma_{j \neq i} q_j$ (e $q_i + q_{-i} = q = \Sigma_j q_j$).

Ne segue che è possibile derivare una *curva di reazione* per l'impresa oligopolista i, $q_i^*(q_{-i})$, del tutto analoga a quella di un duopolista.

- Del resto, basta pensare all'impresa i come ad un monopolista sulla curva di domanda residuale $\underline{P}(q_i) = P(q_i + q_{-i})$ per capire perché le cose stanno così.
- Sotto l'ipotesi che la curva di reazione di un'impresa risulti decrescente, data la simmetria possiamo ora identificare l'equilibrio di Cournot (simmetrico: $q_i^N = q_j^N$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$) come intersezione tra essa e la retta di equazione $q_i = q_{-i}/(n - 1)$.

Graficamente (caso lineare):

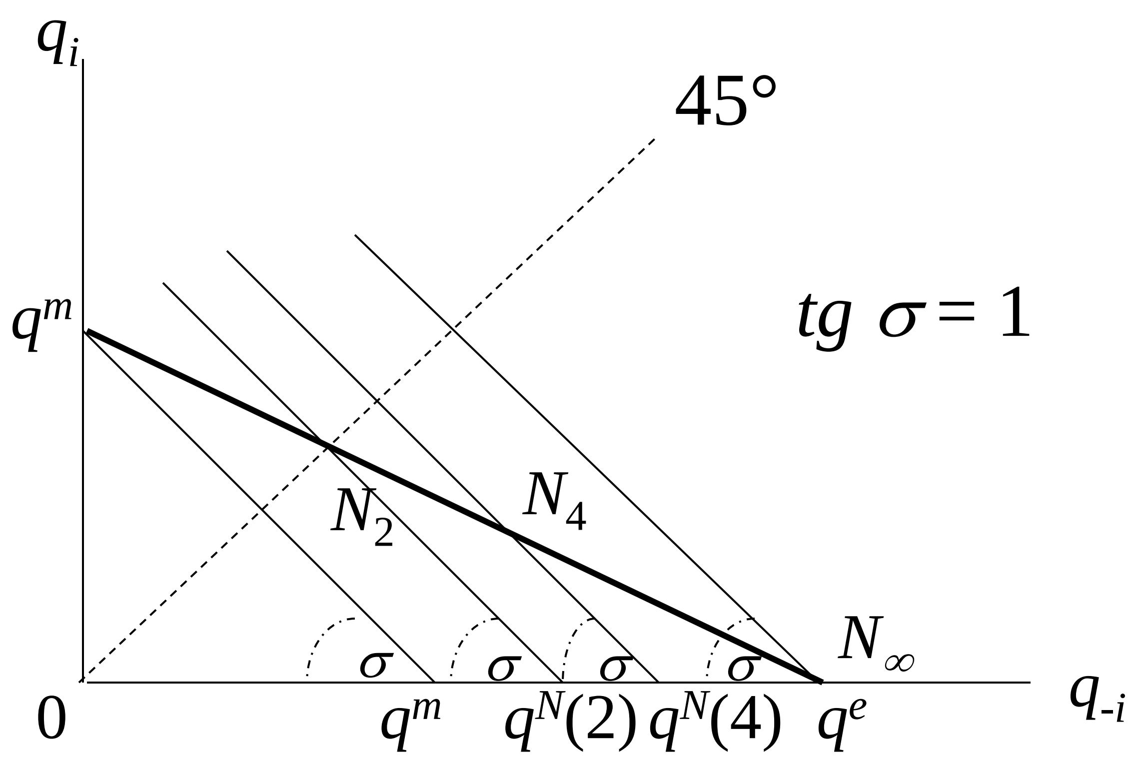
n = 2, 3, 4, etc.



N_n = equilibrio di Cournot con n imprese

- Si noti nel grafico precedente che, nel caso $n = 2$, abbiamo l'equilibrio di duopolio, ormai ben noto.
- Si vede subito, inoltre, che al crescere del numero delle imprese la quantità prodotta da ciascuna impresa, $q_i^N(n)$, **decresce** (come già nel passaggio da monopolio a duopolio), mentre cresce l'ammontare $q_{-i}^N(n)$.
- Cosa accade alla quantità complessiva $q^N(n) = (q_i^N(n) + q_{-i}^N(n))$? Possiamo rispondere utilizzando graficamente le solite rette di *iso-prodotto* di equazione $q_i + q_{-i} =$ costante.

Graficamente (caso lineare):



Si vede dal grafico precedente che $q^N(n)$ *cresce monotonicamente* con n.

- Inoltre: $q^N(1) = q^m$,

  - $\lim_{n\to\infty} q^N(n) = q^e$,

  e

  - $q^m < q^N(n) < q^e$.

- Questi risultati del caso lineare possono, come al solito, essere confermati per via algebrica. Poiché:

$$\pi_i(q_i, q_{-i}) = P(q)q_i - cq_i$$

dove $q = q_i + q_{-i}$, ne segue che $\partial\pi_i/\partial q_i = 0$ implica

$$- bq_i + a - bq_i - bq_{-i} - c = 0$$

$$\downarrow$$

$$q_i^*(q_{-i}) = (a - c)/(2b) - q_{-i}/2.$$

Caso lineare, soluzione algebrica:

Poiché nell'equilibrio simmetrico:

$$q_{-i}^N = (n - 1)q_i^N,$$

usando la curva di reazione si ottiene che:

$$q_i^N(n) = (a - c)/((n + 1)b) = q^e/(n + 1),$$

- $q^N(n) = nq_i^N(n) = nq^e/(n + 1),$
- $p^N(n) = P(q^N(n)) = (a + nc)/(n + 1).$

- Perciò:
  - $q^e > q^N(n) > q^m$ e $p^m > p^N(n) > p^e = c,$

con

- $\lim_{n\to\infty} p^N(n) = c,$ e $\lim_{n\to\infty} q_i^N(n) = 0.$

Si noti che il profitto della singola impresa decresce al crescere di n, poiché il sia il prezzo sia la quantità prodotta diminuiscono.

- In effetti, si computa facilmente che:
  - $\pi_i^N(n) = (a - c)^2/(b(n + 1)^2)$.
- Si noti inoltre che:
  - $\Pi^N(n) = n\pi_i^N(n) = n(a - c)^2/(b(n + 1)^2)$,
- perciò $\partial\Pi^N/\partial n < 0$ (anche i profitti complessivi diminuiscono).
- Si noti infine che per n che va da 1 all'infinito le precedenti formule producono i valori di equilibrio delle forme di mercato comprese tra il monopolio, l'oligopolio (*à la* Cournot) e la concorrenza perfetta.

Modello di Stackelberg (1934)

- Heinrich Freiherr von Stackelberg (1905-1946) è stato un economista di origini baltiche (nato a Mosca e morto a Madrid).
- Nel modello di **Stackelberg** un'impresa (detta *leader*) sceglie (credibilmente) la propria quantità prima del suo competitore, sapendo che costui (detto *follower*) terrà conto della sua scelta nel decidere a sua volta la propria produzione.
- L'interpretazione moderna del suo modello è quella di una **variante sequenziale** del modello duopolistico di Cournot, del quale si prende in esame l'**equilibrio di Nash perfetto rispetto ai sotto-giochi**.

Modello di Stackelberg

- La possibilità di scegliere per primo concede al leader un **vantaggio strategico** che gli consente di ottenere una maggiore quota di mercato e maggiori profitti.
- Il modello è utilizzato in economia per studiare situazioni in cui sia presente un vantaggio per un'impresa, riconducibile ad una sua leadership tecnologica o reputazionale, o al suo essere presente sul mercato **prima** del competitore.

Assumiamo per semplicità che le imprese siano identiche, a parte per il diverso ruolo giocato.

- Risolvendo il gioco a ritroso, dopo aver osservato la scelta dell'impresa *leader* (diciamo l'impresa 1), q_1, il *follower* (diciamo l'impresa 2) produrrà credibilmente solo sulla base della sua curva di reazione:

$$q_2^*(q_1) = (a - c)/(2b) - q_1/2.$$

- Perciò l'impresa *leader* sceglierà la propria produzione massimizzando:

$$\pi_1(q_1, q_2^*(q_1)\ ) = P(q_1 + q_2^*(q_1))q_1 - cq_1.$$

La condizione di massimo profitto diventa perciò:

- $d\pi_1/dq_1$

$$= P'(q)(1 + \mathrm{d}q_2^*/\mathrm{d}q_1)q_1 + P(q) - c = 0$$

$$\downarrow$$

$$- \; b(1 - \tfrac{1}{2})q_1 + a - bq_1 - bq_2^* - c = 0$$

$$\downarrow$$

$$a - 3bq_1/2 - (a - c)/2 + bq_1/2 - c = 0$$

$$\downarrow$$

$$q_1 = (a - c)/(2\mathrm{b}) \; (= q^m).$$

Nell'**equilibrio di Nash perfetto rispetto ai sottogiochi** di questo *gioco sequenziale* (**S**tackelberg vs **C**ournot):

- $q_L^S = (a - c)/(2b) > q_i^C$
- $q_F^S = q_2^*(q_L^S) = (a - c)/(4b) < q_i^C$
- $q^S = q_L^S + q_F^S = 3(a - c)/(4b) > q^C$
- $p^S = P(q^S) = (a + 3c)/4 < p^C$
- $\pi_L^S = (a - c)^2/(8b) > \pi_i^C > (a - c)^2/(16b) = \pi_F^S$
- $\Pi^S = \pi_L^S + \pi_F^S = 3(a - c)^2/(16b) < \Pi^C$.