# I NUMERI REALI

Le classi numeriche più comunemente usate sono:

$\mathbb{N}$ i numeri naturali

$\mathbb{Z}$ i numeri interi

$\mathbb{Q}$ i numeri razionali

$\mathbb{R}$ i numeri reali

$\mathbb{C}$ i numeri complessi

(ciascuna delle classi è contenuta nelle successive).
I numeri complessi non sono considerati in queste note.

Ricordiamo le proprietà delle classi numeriche più semplici: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$.

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ è l'insieme dei numeri che ci servono per contare.
  Il fatto di includere 0 in $\mathbb{N}$ o meno è una scelta basata sull'utilizzo prevalente che si intende fare di $\mathbb{N}$. Noi includeremo 0. Si noti che in $\mathbb{N}$ è possibile fare addizioni e moltiplicazioni senza alcuna eccezione, ma non è sempre possibile effettuare la sottrazione e la divisione, ovvero le operazioni inverse dell'addizione e moltiplicazione. Da un punto di vista astratto, possiamo dire che i numeri interi $\mathbb{Z}$ e i numeri razionali $\mathbb{Q}$ vengono introdotti proprio per poter effettuare queste operazioni inverse.

- $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$.
  Dati due interi qualsiasi, è sempre possibile farne la differenza. Emerge chiaramente in $\mathbb{Z}$ l'aspetto subordinato della operazione di sottrazione rispetto alla somma:

  $$a - b \ \text{ non è altro che } \ a + (-b).$$

- $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{m}{n} : \, m, n \in \mathbb{Z}, \ n \neq 0 \right\}$.
  L'operazione di divisione è sempre possibile in $\mathbb{Q}$, fatta eccezione per il caso in cui il divisore è 0. Analogamente a quanto si era visto in $\mathbb{Z}$ per la sottrazione, in $\mathbb{Q}$ il ruolo della operazione di divisione è subordinato rispetto alla moltiplicazione:

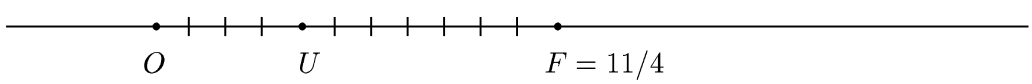
  $$\frac{a}{b} \ \text{ non è altro che } \ a \cdot b^{-1}.$$

## Dai numeri razionali ai numeri reali

La classe numerica $\mathbb{Q}$ ci permette di passare dall'idea del *contare* a quella del *misurare*. L'operazione di misurare è così ovvia che a volte non ci rendiamo nemmeno conto di farla. Affermazioni come "questo foglio è largo 21,3 cm" necessitano della nozione di multiplo e sottomultiplo, quindi dei numeri razionali. Queste affermazioni potrebbero essere contestate, dicendo che si potrebbe asserire che questo foglio è largo 213 mm.; adottando come unità di misura i millimetri anzichè i metri, non avremmo bisogno di sottomultipli e di cifre decimali. Il punto è che contare i millimetri non è sufficiente per tutte le misure di lunghezza che dobbiamo fare: è difficile poter identificare l'operazione di misurare con quella di contare.

L'insieme $\mathbb{Q}$ è un insieme particolarmente ricco di numeri. Non solo essi sono in numero infinito, ma vale anche la proprietà che tra due qualsiasi numeri razionali ce ne sono infiniti (cosa utile, evidentemente, proprio per le esigenze della misurazione). L'idea quindi che non ci sia bisogno di introdurre altri numeri oltre ai razionali, parrebbe fondata, ma così non è.

Tanto per cominciare, i numeri razionali non sono sufficienti per misurare tutti i segmenti della retta euclidea. Il famoso esempio della *incommensurabilità del lato e della diagonale del quadrato* esprime proprio questo fatto. Cerchiamo di precisarlo meglio, introducendo un sistema cartesiano. Consideriamo una retta e fissiamo su di essa un punto $O$ (origine) e un punto $U$ distinto da 0 (il segmento $OU$ ci servirà come unità di misura). Consideriamo *positivo* il verso che va da $O$ ad $U$ e *negativo* il verso opposto (orientamento della retta). Ora, per rappresentare il numero razionale $p/q$, dividiamo il segmento $OU$ in $q$ parti uguali. Sia $OE$ la prima di queste parti, cioè quella che ha $O$ come primo estremo. Se $p$ è positivo, riportiamo $OE$ $p$ volte a partire da $O$ nel verso positivo, ottenendo il segmento $OF$. Se $p$ è negativo, riportiamo $OE$ $p$ volte a partire da $O$ nel verso negativo, ottenendo il segmento $OF$. In questo modo, il numero $p/q$ sarà rappresentato sulla retta dal punto $F$.




*Esercizio.* Rappresentare $5,\ 1,\ -1,\ 3/4,\ -1/4$ su una retta orientata.

Consideriamo ora il segmento (positivo) $OD$ uguale alla diagonale del quadrato di lato $OU$. Non siamo in grado di trovare nessun numero razionale che venga rappresentato dal punto $D$. Siamo cioè di fronte al fatto che non vi è alcun numero razionale il cui quadrato sia uguale a 2. Vi è quindi una esigenza di misurazione per quanto astratta, nel senso che stiamo cercando di misurare oggetti matematici come i segmenti, che ci induce ad andare oltre i razionali. Non è però l'unica ragione.

In realtà, i numeri razionali non sono soddisfacenti per le esigenze dell'analisi matematica. L'ambiente migliore nel quale sviluppare l'analisi matematica (ovvero quanto riguarda i limiti, la continuità, la derivazione e l'integrazione) è quello costituito dai cosiddetti *numeri reali*.

Non è certo un caso se l'opera di sistemazione dell'analisi è inscindibilmente legata ai nomi di Weierstrass e Dedekind, il cui contributo alla comprensione di cosa siano i numeri reali è stato essenziale. Potremmo dire che i numeri reali sono l'ambiente migliore che sia stato inventato finora per studiare i fenomeni continui. Vediamo un esempio.

Consideriamo la funzione $f(x) = x^2 - 2$ nel campo dei numeri razionali, che soddisfa il requisito della *continuità*. Essa passa da un valore negativo (es.: $f(0) = -1$) ad uno positivo (es.: $f(2) = 2$), senza mai assumere il valore 0. È quindi impossibile, in $\mathbb{Q}$, disegnare il grafico della funzione $f$ "senza staccare la matita dal foglio" Questo fatto è violentemente contrario all'idea di continuità. Dove sta il trucco? Se consideriamo $f$ nel campo dei numeri reali, essa si annulla per $x = \sqrt{2}$, che si trova proprio fra 0 e 2, e $x = \sqrt{2}$ appartiene ad $\mathbb{R}$ ma non appartiene a $\mathbb{Q}$ !! Non è quindi sorprendente che possa passare da un valore negativo a uno positivo tra 0 e 2. Il punto è che senza $\mathbb{R}$ a disposizione, nozioni intuitive legate alla proprietà di continuità risulterebbero false.

## Una definizione dei numeri reali

Come possiamo descrivere i numeri reali? Occorre dire con chiarezza che non è un compito facile. Se il passaggio da $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ ed a $\mathbb{Q}$ è quasi banale (almeno da un punto di vista formale) il passaggio ai numeri reali è decisamente più complicato. Il problema è duplice. È difficile sia definire i numeri reali a partire dai razionali, quanto verificare che quanto si è fatto risponda davvero agli scopi che ci si erano prefissi.

Se assumessimo il secondo punto di vista, ossia ci chiedessimo cosa pretendiamo dall'introduzione dei numeri reali, la risposta a questa domanda ci sposterebbe dal terreno della costruzione dei numeri reali a partire dai razionali a quello della *fondazione assiomatica* dei numeri reali. A titolo di esempio, riportiamo a p. 6 una tabella riassuntiva degli assiomi che caratterizzano i numeri reali.

Dedichiamo un poco più di spazio, invece, a quella che potrebbe essere una via per costruire i numeri reali a partire dai numeri decimali. Non è facile riassumere in breve le difficoltà che ci sono nel voler definire i numeri reali a partire dai razionali, ma si può quanto meno osservare come le costruzioni consuete dei numeri reali richiedano l'uso dell'infinito. Le strade percorribili sono tante: sezioni di Dedekind, classi contigue, oppure scatole cinesi, per citare qualcosa probabilmente familiare a chi proviene dalla scuola superiore, o, ancora, classi di equivalenza di successioni di Cauchy in campo razionale, semirette razionali senza massimo. Qui seguiremo una via abbastanza intuitiva: descriveremo un numero reale come un *allineamento di cifre decimali*.

Un numero reale è qualcosa della forma

$$a, a_1 a_2 \ldots ,$$

cioè, partendo da sinistra, c'è un allineamento decimale finito, una virgola e un allineamento decimale infinito. Quella precedente è quasi la definizione di numero reale. Vi è infatti ancora un importante aspetto da sistemare, di cui ci occuperemo tra poco. Vediamo prima qualche esempio:

$31,000\ldots$

$-5,000\ldots$

$0,444\ldots$

$0,202202220\ldots$

I primi tre esempi sono di numeri reali che rappresentano numeri già noti (naturali, interi, razionali). L'ultimo esempio è quello di un numero che invece è nuovo, ovverossia che non è razionale, in quanto non è periodico.

Veniamo ora a quel dettaglio da sistemare cui si è accennato poco sopra. Consideriamo i due numeri reali $3,000\ldots$ e $0,333\ldots$. È evidente che, se li dobbiamo moltiplicare fra loro, l'idea che ci viene in mente è quella di procedere come con i numeri decimali finiti. Otteniamo così $0,999\ldots$. Ma noi ci saremmo aspettati di ottenere 1, poichè $3,000\ldots$ è semplicemente il numero 3 e $0,333\ldots$ il numero $1/3$. Dunque dobbiamo fare l'identificazione

$$0,999\ldots = 1.$$

Superato questo scoglio, possiamo pensare di avere definito i numeri reali. In altre parole, possiamo assumere di avere a disposizione $\mathbb{R}$. In realtà, resterebbero le seguenti cose da fare:

– definire somma e prodotto di numeri reali

– introdurre la relazione di minore (o di minore o uguale)

– verificare che le operazioni e la relazione introdotte soddisfino tutti gli assiomi (vedi p. 6)

– osservare come $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ possano essere visti come sottoinsiemi di $\mathbb{R}$.

In queste note, ci limitiamo a dire che il programma sopra delineato è fattibile e che ci porta ad avere a disposizione il sistema numerico dei numeri reali.

Osserviamo invece un punto chiave, cioè che $\mathbb{R}$ si distingue da $\mathbb{Q}$ per una proprietà fondamentale: *la proprietà di completezza* (vedi assioma (*) a p. 6). Non solo la proprietà di completezza distingue in modo essenziale $\mathbb{R}$ da $\mathbb{Q}$ (è l'unico assioma della lista che non sia soddisfatto dai numeri razionali!), ma permette anche di ricavare proprietà notevoli dei numeri reali. Vediamo le più significative:

**Proprietà 1** (*di esistenza della radice quadrata*): per ogni numero reale positivo $x$, dato $n \in \mathbf{N}$ esiste ed è unico il numero reale positivo $y$ tale che $y^n = x$. Tale $y$ viene detto *radice aritmetica $n$-esima* di $x$ e indicato con $\sqrt[n]{x}$.
*Osservazione:* Il simbolo $\sqrt[2]{x}$ indica l'unico numero reale positivo il cui quadrato è $x$. Pertanto $\sqrt[2]{4} = 2$. È sbagliato dire che $\sqrt[2]{4} = \pm 2$. Invece le soluzioni dell'equazione $x^2 - 4 = 0$ sono $+2$ e $-2$.

**Proprietà 2** (*archimedea*): dati due numeri reali $x, y$ entrambi positivi, esiste sempre un multiplo intero di $x$ (che indicheremo con $nx$) tale che $nx > y$. Una conseguenza importante della proprietà archimedea è che non ci sono numeri reali a distanza infinitesima tra loro.

# ASSIOMI DEI NUMERI REALI

In $\mathbb{R}$ sono definite le operazioni di addizione $(+)$ e moltiplicazione $(\cdot)$ tra coppie di numeri reali, con le seguenti proprietà ($a, b, c$ rappresentano sono numeri reali qualunque):

- *Proprietà associativa*: $(a+b)+c = a+(b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- *Proprietà commutativa*: $a+b = b+a$, $a \cdot b = b \cdot a$
- *Proprietà distributiva*: $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
- *Esistenza degli elementi neutri*: i numeri 0 e 1 soddisfano $a + 0 = 0 + a = a$ e $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, cioè 0 è elemento neutro per l'addizione e 1 è elemento neutro per la moltiplicazione in $\mathbb{R}$
- *Esistenza degli opposti*: per ogni numero reale $a$ esiste un numero reale $-a$ tale che $a + (-a) = 0$
- *Esistenza degli inversi*: per ogni numero reale $a \neq 0$ esiste un numero, indicato con $a^{-1}$, tale che $a \cdot a^{-1} = 1$

È definita la relazione d'ordine $\leq$ tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

- *Dicotomia*: per ogni coppia di numeri reali $a, b$ si ha $a \leq b$ oppure $b \leq a$
- *Proprietà antisimmetrica*: se valgono contemporaneamente $a \leq b$ e $b \leq a$, allora $a = b$
- Se $a \leq b$ allora vale anche $a + c \leq b + c$
- Se $0 \leq a$ e $0 \leq b$ allora valgono anche $0 \leq a + b$ e $0 \leq a \cdot b$

## (*) Assioma di completezza

Sia $A$ un sottoinsieme dei numeri reali superiormente limitato (cioe tale che esiste almeno un numero reale $K$ tale che ogni elemento $a$ di $A$ soddisfa $a \leq K$). Allora esiste l'estremo superiore di $A$, cioe un elemento $M$ tale che

a) $a \leq M$ per ogni $a \in A$

b) $M$ è il piu piccolo numero reale che soddisfa la proprietà a).