NOMENCLATURA DI TEORIA DEGLI INSIEMI E DI LOGICA

Lo scopo di queste note informali è descrivere il significato intuitivo di alcune parole che si incontrano frequentemente quando si parla di matematica.

Teoria degli Insiemi

Un insieme è una collezione di oggetti. Generalmente gli insiemi si indicano con le lettere maiuscole dell'alfabeto latino.
Un insieme è *ben definito* quando è sempre possibile dire senza abiguità se un oggetto appartiene o no all'insieme.

Esempio. L'insieme

$$A = \{1, 5, -7\}$$

è l'insieme i cui elementi sono i numeri 1, 5 e -7. Nota che l'insieme $\{1, 5, 1, -7, 5, 5\}$ coincide con l'insieme A.

L'appartenenza di un elemento ad un insieme si indica con il simbolo $\in$.
La negazione dell'appartenenza si indica con il simbolo $\notin$.

Esempio. Sia A come nell'esempio precedente. Si ha che $5 \in A$ e $0 \notin A$.

L'*insieme vuoto* è l'insieme che non contiene elementi e si indica con il simbolo $\emptyset$.
Un insieme si può descrivere (o definire) *elencandone* tutti gli elementi (come negli esempi precedenti). Ovviamente è possibile descrivere un insieme elencandone tutti gli elementi quando questi sono in *numero finito*.
Un altro modo per descrivere un insieme è il seguente:

$$A = \{x : P(x)\},$$

dove $P(x)$ è la *proprietà caratterizzante*, cioè una proprietà vera per gli elementi di A e solo per gli elementi di A.

Esempio. Le espressioni

$$A = \{0, 2, 4, 6, \ldots\}$$
$$A = \{x : x \text{ è un numero intero e } x \text{ è divisibile per } 2\}$$

sono due modi equivalenti per indicare l'insieme dei numeri interi pari.

Esempio. L'insieme

$$B = \{x : x \text{ è un triangolo e } x \text{ ha un angolo retto}\}$$

è l'insieme dei triangoli rettangoli.

Inclusione di insiemi.
Si dice che l'insieme A è contenuto (o incluso) nell'insieme B (e si scrive $A \subseteq B$) quando ogni elemento che appartiene ad A appartiene anche a B.
L'insieme vuoto è contenuto in ogni insieme.

Esempio. $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

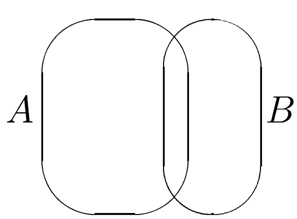
Operazioni tra insiemi.
Supponiamo di essere in un "universo di discorso" U. Tra gli insiemi contenuti in U si possono fare alcune operazioni, tra cui *unione*, *intersezione* e *complementare*.

- **Unione.** Dati due insiemi A e B, si dice *unione* di A e B (e si indica con $A \cup B$) l'insieme
$$A \cup B = \{x : x \in A \ o \ x \in B\}$$
($A \cup B$ è l'insieme contenente tutti gli elementi che appartengono ad A e tutti gli elementi che appartengono a B; notare che, con questa definizione, gli elementi che appartengono sia ad A che a B appartengono anche all'unione $A \cup B$).

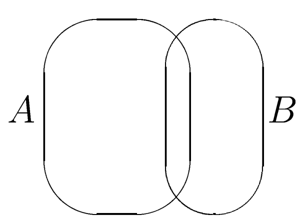
- **Intersezione.** Dati due insiemi A e B, si dice *intersezione* di A e B (e si indica con $A \cap B$) l'insieme
$$A \cap B = \{x : x \in A \ e \ x \in B\}$$
($A \cap B$ è l'insieme contenente tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B).

- **Complementare.** Dato un insieme A, si dice complementare di A rispetto ad U l'insieme $\mathcal{C}(A)$ definito da
$$\mathcal{C}(A) = \{x : x \in U \ e \ x \notin A\}$$
($\mathcal{C}(A)$ è l'insieme contenete gli elementi di U che non appartengono ad A).

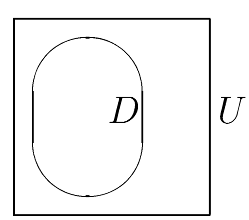
Diagrammi di Venn.



$A \cup B$



$A \cap B$



$\mathcal{C}(A)$

Logica

Quando si parla di matematica si usano (come è già stato fatto in queste note) *parole chiave* o *locuzioni*.

Congiunzioni: "e", "o".

- "**e**": posta tra due frasi, indica che la frase ottenuta è vera nel caso in cui siano vere *entrambe* le frasi.
  Esempio: "$x \in A$ e $x \in B$" è vera se x è un elemento di entrambi gli insiemi (quindi la frase caratterizza l'*intersezione* dei due insiemi).

- "**o**": posta tra due frasi, indica che la frase ottenuta è vera nel caso in cui sia vera *almeno una* delle due frasi, cioè "o" indica la *disgiunzione debole* (nel linguaggio comune, essa può indicare sia la *disgiunzione debole* che la *disgiunzione forte*).
  Esempio: "$x \in A$ o $x \in B$" è vera se $x \in A$, se $x \in B$ o se $x \in A \cap B$, cioè se x è un elemento di uno dei due insiemi o di entrambi (quindi la frase caratterizza l'*unione* dei due insiemi).
  Esempio: "$x \leq y$" si legge "x minore *o* uguale a y" ed è vera sia nel caso in cui $x = y$ che nel caso in cui $x < y$.

Negazione: "non".

- "**non**": l'affermazione "non $P(x)$" è vera nel caso in cui l'affermazione "P(x)" sia falsa, e viceversa.
  Esempio: L'affermazione "x non appartiene ad A ($x \notin A$)" è vera se è falso che "x appartiene ad A ($x \in A$)".
  Esempio: L'affermazione "$3 + 2 \neq 4$" è vera perchè l'affermazione "$3 + 2 = 4$" è falsa; l'affermazione "$3 + 2 \neq 5$" è falsa perchè l'affermazione "$3 + 2 = 5$" è vera.

Quantificatori: "per ogni", "esiste".

- "**per ogni**" (simbolo $\forall$): la frase "$\forall\, x \in A$ vale $P(x)$" significa che *ogni elemento* dell'insieme A soddisfa la proprietà $P(x)$.
  Esempi: "ogni numero intero primo diverso da due è dispari", "ogni triangolo è un poligono", "ogni lombardo è italiano".

- "**esiste**" (simbolo $\exists$): la frase "$\exists\, x \in A$ tale che vale $P(x)$" significa che esiste *almeno un elemento* di A che soddisfa la proprietà $P(x)$; non è necessario che tale elemento sia unico.
  Esempi: "esiste un numero intero primo", "esiste un europeo che abbia la cittadinanza italiana" (affermazioni vere anche se il numero dei numeri primi è infinito, e il numero di coloro che hanno la cittadinanza italiana è circa 57 000 000).

L'uso dei quantificatori, eventualmente combinato con la negazione, è delicato.
Esempio. La negazione della frase "ogni triangolo è isoscele" è "non ogni triangolo è isoscele" (o, equivalentemente, "esiste un triangolo che non è isoscele") e non "ogni triangolo non è isoscele" (che vuol dire "nessun triangolo è isoscele").
Esempio. La frase "esiste un numero che non è primo" (vera; ad esempio 6 è un numero non primo) non è equivalente alla frase "non esiste un numero primo" (falsa).
Esempio. La frase "per ogni numero esiste il suo doppio" non è equivalente alla frase "esiste un numero che è il doppio di ogni numero".

Implicazioni.

- "**implica**" (simbolo $\Rightarrow$): l'affermazione $P(x) \Rightarrow Q(x)$ indica che se x soddisfa la proprietà $P(x)$, allora x soddisfa anche la proprietà $Q(x)$; l'affermazione $P(x) \Rightarrow Q(x)$ dice anche che se x *non* soddisfa $Q(x)$, allora *non* soddisfa neppure $P(x)$. Usando la notazione insiemistica:

  $$\{x \in U : P(x)\} \subseteq \{x \in U : Q(x)\}.$$

  Esempio: "x è un triangolo $\Rightarrow$ x è un poligono" si legge "se x è un triangolo, allora x è un poligono", oppure "ogni triangolo è un poligono". Quindi, "se x non è un poligono, allora non è neppure un triangolo. O ancora, in un linguaggio spesso usato in matematica, "condizione *necessaria* perchè x sia un triangolo è che x sia un poligono", oppure "condizione *sufficiente* perchè x sia un poligono è che x sia un triangolo". In notazione insiemistica, indicando con U l'universo dei sottoinsiemi del piano:

  $$\{x \in U : x \text{ è un triangolo}\} \subseteq \{x \in U : x \text{ è un poligono}\}.$$

- "**se e solo se**" (simbolo $\Leftrightarrow$): indica equivalenza tra due affermazioni (cioè valgono sia $\Rightarrow$ che $\Leftarrow$). Usando la notazione insiemistica:

  $$\{x \in U : P(x)\} = \{x \in U : Q(x)\}.$$

  Esempio: "il triangolo x ha due lati uguali $\Leftrightarrow$ il triangolo x ha due angoli uguali" equivale a "un triangolo ha due lati uguali se e solo se ha due angoli uguali", oppure "condizione *necessaria e sufficiente* perchè il triangolo x abbia due lati uguali è che abbia due angoli uguali", o ancora, "condizione *necessaria e sufficiente* perchè il triangolo x abbia due angoli uguali è che abbia due lati uguali". In notazione insiemistica, indicando con U l'universo dei triangoli:

  $$\{x \in U : x \text{ ha due lati uguali}\} = \{x \in U : x \text{ ha due angoli uguali}\}.$$