

Calcolo delle Probabilità

Il calcolo delle probabilità studia i modelli matematici delle cosiddette *situazioni di incertezza*.

Molte situazioni concrete sono caratterizzate a priori da incertezza su quello che accadrà nel futuro:

- è poco probabile che domani nevichi
- è molto probabile che io superi la prova di matematica
- il test diagnostico è affidabile al 90 %

non vi è certezza sull'esito, ma neppure totale incertezza.

L'incertezza non significa comunque totale mancanza di informazione.

L'incertezza dipende dall'informazione a disposizione.

Il calcolo delle probabilità si propone di fornire una misura quantitativa dell'incertezza (del rischio . . .) connaturata ad un evento *aleatorio*.

Calcolo delle Probabilità - Esempio

1. Consideriamo una moneta con la scritta 1 su una faccia e con la scritta 2 sull'altra. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio della moneta dia come esito il numero 1.
 2. Consideriamo un dado con le facce numerate da 1 a 6. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio del dado dia come esito il numero 1.
- In entrambi i casi l'esito di un lancio è incerto.
 - L'incertezza non è completa: *è più facile che esca 1 lanciando la moneta che lanciando il dado.*

Applicazioni della Teoria della Probabilità: gioco d'azzardo, emissioni di elettroni, chiamate telefoniche, controllo di qualità, meccanica statistica, ereditarietà, teoria dei giochi,...

Definizione di Probabilità

1. Definizione classica
2. Definizione frequentista
3. Definizione soggettiva
4. Definizione assiomatica

Definizione Classica

Supponiamo che un esperimento abbia N esiti possibili *incompatibili* tra di loro *equiprobabili* e che n di questi esiti siano favorevoli al verificarsi di un certo evento E . Si definisce **probabilità $p(E)$ dell'evento** il rapporto

$$p(E) = \frac{n}{N} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}}$$

(*esiti incompatibili: se se ne verifica uno non può verificarsene l'altro*)

ESEMPIO - Supponiamo di lanciare un dado non truccato:

1. la probabilità che esca 1 è $1/6$
2. la probabilità che esca un numero maggiore di 2 è $4/6 = 2/3$
3. la probabilità che esca un numero pari è $3/6 = 1/2$

Definizione Classica - Esempi

ESEMPIO - 1 Qual è la probabilità che sabato prossimo il primo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57? Poichè il primo estratto sulla ruota di Napoli è scelto tra 90 numeri (*equiprobabili*), i casi possibili sono 90 e quello favorevole è 1, dunque la probabilità risulta essere $1/90$.

ESEMPIO - 2 Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57? Il medesimo ragionamento, usato nell'esempio precedente, porta a concludere che la probabilità è ancora $1/90$.

ESEMPIO - 3 Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57, sapendo che il primo estratto non è il numero 57? Dopo la prima estrazione i numeri disponibili non sono più 90, ma 89 e quindi la probabilità è $1/89$.

(Sapendo che il primo estratto è proprio il 57, la probabilità risulta 0, perchè dopo la prima estrazione il 57 non è più disponibile.)

La probabilità dipende dall'informazione a disposizione di chi la calcola !

Definizione Classica - Esercizi

ESERCIZIO - 1 Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 5 ?

casi possibili : tutte le coppie (*equiprobabili*) ordinate di numeri naturali fra 1 e 6

casi favorevoli: le coppie ordinate (1,4) , (2,3) , (3,2) , (4,1)

$$\Rightarrow \text{probabilità} = \frac{\text{numero di casi favorevoli}}{\text{numero di casi possibili}} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

NOTA - La somma delle uscite di due dadi è un numero compreso fra 2 e 12. Avrei potuto considerare come casi possibili i numeri compresi tra 2 e 12, ma non sarebbe stato possibile applicare la definizione classica, in quanto tali somme non sono equiprobabili: per esempio il numero 2 si ottiene solo come somma di 1 dal primo dado e 1 dal secondo mentre il numero 4 si può ottenere come 1 + 3, 2 + 2, 3 + 1..

ESERCIZIO - 2 Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 7 ? che sia 12 ? [risposte: 1/6 , 1/36]

Definizioni di Probabilità

DEFINIZIONE FREQUENTISTA - La probabilità di un evento E , per esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta, è il limite a cui tende il rapporto n/N dove n è il numero di teste e N è il numero di lanci totali, quando N tende all'infinito. La probabilità $p(E)$ dell'evento è il limite delle frequenze relative:
$$p(E) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{F_{ass}}{N}$$

DEFINIZIONE SOGGETTIVA - Considerato un evento E , la probabilità $p(E)$, che un soggetto attribuisce all'evento E , è un numero reale che misura il grado di fiducia che un individuo *coerente* attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di E .

DEFINIZIONE ASSIOMATICA - Si definisce la misura di probabilità su uno spazio degli eventi Ω , tramite alcune proprietà (*assiomi*).

Probabilità - Proprietà

Sia Ω un insieme finito, che chiameremo *spazio degli eventi*. Si dice *evento* un qualunque sottoinsieme di Ω . Una misura di *probabilità* su Ω è una funzione p che associa ad ogni sottoinsieme E di Ω un numero reale tale che:

1. $0 \leq p(E) \leq 1$ per ogni $E \subseteq \Omega$
2. $p(\Omega) = 1$ (evento certo), $p(\emptyset) = 0$ (evento impossibile)
3. per ogni coppia di sottoinsiemi E, F contenuti in Ω , tali che $E \cap F = \emptyset$ (eventi incompatibili), vale: $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$

EVENTO ELEMENTARE: ogni sottoinsieme di Ω formato da un unico elemento

EVENTI INCOMPATIBILI: E, F sono incompatibili se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro: $E \cap F = \emptyset$

EVENTO COMPLEMENTARE: il complementare di E è l'evento che si verifica quando E non si verifica (la probabilità del complementare è $1 - p(E)$).

Probabilità - Esempi

ESEMPIO - 1 Nel lancio di un dado:

- lo spazio degli eventi è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 3\} = \{\text{esce } 2 \text{ o } 3\}$ e $\{3, 6\} = \{\text{esce un multiplo di } 3\}$ sono eventi
- l'evento $\{2\} = \{\text{esce il numero } 2\}$ è un evento elementare
- l'evento $\{2, 4, 6\} = \{\text{esce un numero pari}\}$ non è un evento elementare

ESEMPIO - 2 Nel lancio di una moneta $\Omega = \{TESTA, CROCE\}$. L'evento complementare di $\{TESTA\}$ è $\{CROCE\}$. I due eventi sono incompatibili.

ESEMPIO - 3 Nel lancio di un dado:

- l'evento complementare di $\{2, 4, 6\} = \{\text{esce un numero pari}\}$ è $\{1, 3, 5\} = \{\text{esce un numero dispari}\}$
- l'evento complementare di $\{4\} = \{\text{esce il numero } 4\}$ è $\{1, 2, 3, 5, 6\} = \{\text{esce un numero diverso da } 4\}$
- gli eventi $\{\text{esce un numero pari}\}$ e $\{\text{esce il numero } 5\}$ sono incompatibili
- gli eventi $\{\text{esce un numero pari}\}$ e $\{\text{esce un multiplo di } 3\}$ sono compatibili

Probabilità - Esercizi - 1

ESERCIZIO - In un'urna ci sono 4 palline nere e 5 bianche. Ne estraiamo una. Qual è la probabilità che sia bianca?

SOLUZIONE - Indichiamo con N_1, N_2, N_3, N_4 le 4 palline nere e con B_5, B_6, B_7, B_8, B_9 le 5 palline bianche.

$$\Omega = \{N_1, \dots, N_4, B_5, \dots, B_9\}$$

Poichè non c'è trucco:

$$p(N_1) = p(N_2) = \dots = p(B_5) = \dots p(B_9) = \frac{1}{9}$$

Dobbiamo calcolare

$$p\{B_5, \dots, B_9\} = p(B_5) + \dots + p(B_9) = \frac{5}{9}$$

La probabilità che la pallina estratta sia bianca è $\frac{5}{9}$

Probabilità - Esercizi - 2

ESERCIZIO - Nelle ipotesi dell'esercizio precedente estraiamo prima una pallina senza guardarla. Successivamente ne estraiamo un'altra, sempre senza guardare la prima. Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

SOLUZIONE 1 - Possiamo scegliere come Ω l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di palline. Tale spazio degli eventi contiene $9 \cdot 8 = 72$ elementi. Ciascun elemento, per simmetria, ha esattamente probabilità $1/72$.

L'insieme di cui dobbiamo trovare la probabilità è formato dalle coppie con la seconda pallina bianco e quindi contiene $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 40$ elementi.

La sua probabilità è $\frac{1}{72} \cdot 40 = \frac{5}{9}$

SOLUZIONE 2 - L'operazione effettuata prima della seconda estrazione è assolutamente ininfluente (*non fornisce alcuna informazione*). In questa ottica lo spazio degli eventi è

$$\Omega' = \{N_1, \dots, N_4, B_5, \dots, B_9\}$$

La probabilità di ogni elemento è $1/9$.

L'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è $\{B_5, \dots, B_9\}$

Probabilità - Esercizi - 3

ESERCIZIO - Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, supponiamo di guardare la prima pallina estratta e scoprire che è bianca. Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

SOLUZIONE - Lo spazio degli eventi *relativo alla seconda estrazione* contiene solo 4 palline bianche e 4 nere.

La probabilità cercata è pertanto $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

COMMENTI

- La scelta dello spazio degli eventi non è unica. Tale spazio non è assegnato a priori dal problema, ma fa parte del **modello matematico**.
- La probabilità dipende in modo essenziale dall'**informazione** a disposizione di chi la calcola.