Test diagnostici- 1

Un *test diagnostico* è un metodo usato per diagnosticare una certa malattia: per esempio il Pap test è un metodo per diagnosticare il tumore del collo dell'utero, la glicemia è un metodo per diagnosticare il diabete, ecc...

Un test diagnostico "perfetto" dovrebbe dare esito positivo in tutti i soggetti malati e esito negativo in tutti i soggetti sani.

Non esistono test diagnostici perfetti. In generale un test può sbagliare. Vogliamo studiare il problema dal punto di vista della probabilità. Iniziamo col definire alcuni parametri. Il test verrà somministrato a una certa popolazione P il cui numero di individui verrà chiamato $|P|$ (P=popolazione totale). Indichiamo con:

- M^-= insieme dei soggetti sani, $|M^-|$= numero dei soggetti sani
- M^+= insieme dei soggetti malati, $|M^+|$= numero dei soggetti malati

Si ha ovviamente $P = M^- \cup M^+$

Si dice PREVALENZA DELLA MALATTIA la probabiltà di essere malato:

$p(M^+) = \frac{|M^+|}{|P|}$.

Test diagnostici- 2

- T^-= insieme dei soggetti con test negativo, $|T^-|$= numero dei soggetti con test negativo
- T^+= insieme dei soggetti con test positivo, $|T^+|$= numero dei soggetti con test positivo

Poichè il test diagnostico non è "perfetto" in generale $T^+ \neq M^+$ e $T^- \neq M^-$.

- si dice SENSIBILITÀ del test la probabilità di avere il test positivo se si è malati: $p(T^+|M^+)$
- si dice SPECIFICITÀ del test la probabilità di avere il test negativo se si è sani: $p(T^-|M^-)$

Si suppone che questi dati (sensibilità e specificità) siano noti da studi pregressi del test, come pure si suppone che sia nota la prevalenza della malattia per dati epidemiologici.

Test diagnostici- 3

Supponiamo ora di usare il test come screening di massa.

Alcuni individui di P risulteranno positivi al test (T^+) e altri negativi (T^-) (si osservi che ancora $T^+ \cup T^- = P$) A questo punto:

- Un paziente con test positivo si chiede se ha la malattia, ovvero si chiede quale è la probabilità di avere la malattia sapendo che il suo test è positivo. Si osservi che prima di fare il test e di saperne l'esito la sua probabilità di avere la malattia era la prevalenza della malattia, ma ora che ha una informazione in più (l'esito del test) tale probabilità è sperabilmente cambiata.
- Analogamente un paziente con test negativo si chiede quale è la sua probabilità di essere sano.

Test diagnostici- 4

- Si dice VALORE PREDITTIVO POSITIVOdel test (V.p.p.) la probabilità di avere la malattia se si ha il test positivo: $p(M^+|T^+)$
- Si dice VALORE PREDITTIVO NEGATIVO del test (V.p.n.) la probabilità di non avere la malattia se si ha il test negativo: $p(M^-|T^-)$

La formula di Bayes ci dá:

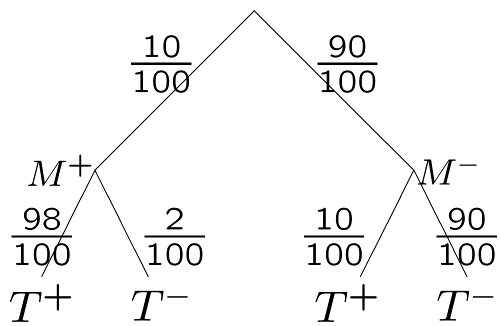
V.p.p.$= p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)}$

Test diagnostici - Esercizio 1

Un test diagnostico ha specificitá pari al 90% e sensibilità pari al 98%.
Calcolare i valori predittivi per una prevalenza della malattia del 10%.

Test diagnostici - SOLUZIONE

Costruiamo innanzitutto l'albero:



Applicando la formula di Bayes si ottiene il V.p.p.:

$$p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)} = \frac{\frac{98}{100}\cdot\frac{10}{100}}{\frac{98}{100}\cdot\frac{10}{100}+\frac{10}{100}\cdot\frac{90}{100}} = \frac{98\cdot 10}{98\cdot 10+10\cdot 90} = \frac{98}{98+90}$$

e il valore predittivo negativo:

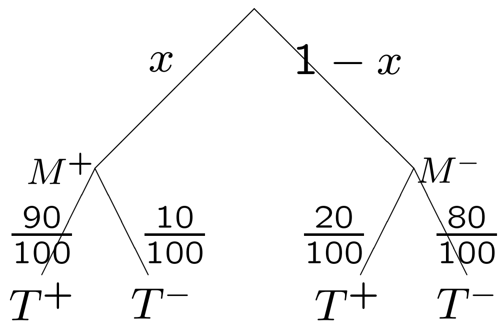
$$p(M^-|T^-) = \frac{p(T^-|M^-)p(M^-)}{p(T^-)} = \frac{\frac{90}{100}\cdot\frac{90}{100}}{\frac{90}{100}\cdot\frac{90}{100}+\frac{2}{100}\cdot\frac{10}{100}} = \frac{90\cdot 90}{90\cdot 90+2\cdot 10} = \frac{90\cdot 9}{90\cdot 9+2}$$

Test diagnostici - Esercizio 2

Un test diagnostico con sensibilità del 90% e specificità del' 80% viene messo a punto per diagnosticare una certa malattia. Quale è la prevalenza di tale malattia se il valore predittivo positivo è del 60%. In corrispondenza di tale valore, calcolare il valore predittivo negativo del test.

Test diagnostici - SOLUZIONE

Questa volta l'incognita è la prevalenza e l'albero è il seguente:



Applicando la formula di Bayes si ottiene il V.p.p.:

$$\frac{60}{100} = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+)p(M^+)}{p(T^+)} = \frac{\frac{90}{100}\cdot x}{\frac{90}{100}\cdot x + \frac{20}{100}\cdot (1-x)}$$

Semplificando e risolvendo l'equazione di primo grado in x si ottene:

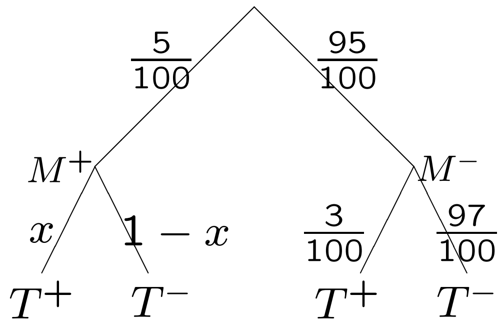
$$\frac{3}{5} = \frac{\frac{9}{10}\cdot x}{\frac{9}{10}\cdot x + \frac{2}{10}\cdot (1-x)},\ \frac{3}{5} = \frac{9\cdot x}{9\cdot x + 2 - 2x},\ x = \frac{1}{4}$$

Esercizio 3

Un test diagnostico, corrispondente ad una malattia che ha prevalenza del 5%, ha specificità pari al 97%. Quale deve essere la sensibilità del test se si vuole che che la probabilità di essere falsi negativi sia pari all'1%? Trovare il corrispondente valore predittivo positivo del test.

Esercizio 3-Soluzione

Questa volta l'incognita è la sensibilità e l'albero è il seguente:



I falsi negativi sono gli individui che hanno il test negativo ma che hanno la malattia:

$$p(M^+ \cap T^-) = p(T^-|M^+) \cdot p(M^+) \Leftrightarrow \frac{1}{100} = (1-x) \cdot \frac{5}{100} \Leftrightarrow 1 = 5 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{4}{5} = 80\%$$

$$\text{V.p.p.} = p(M^+|T^+) = \frac{p(T^+|M^+) \cdot p(M^+)}{p(T^+)} = \ldots..$$