Calcolo delle Probabilità

Il calcolo delle probabilità studia i modelli matematici delle cosidette *situazioni di incertezza*.

Molte situazioni concrete sono caratterizzate a priori da incertezza su quello che accadrà nel futuro:

- è poco probabile che domani nevichi
- è molto probabile che io superi la prova di matematica
- il test diagnostico è affidabile al $90\,\%$

non vi è certezza sull'esito, ma neppure totale incertezza.

L'incertezza non significa comunque totale mancanza di informazione.

L'incertezza dipende dall'informazione a disposizione.

Il calcolo delle probabilità si propone di fornire una misura quantitativa dell'incertezza (del rischio . . .) connaturata ad un evento *aleatorio*.

Calcolo delle Probabilità - Esempio

1. Consideriamo una moneta con la scritta 1 su una faccia e con la scritta 2 sull'altra. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio della moneta dia come esito il numero 1.
2. Consideriamo un dado con le facce numerate da 1 a 6. Vogliamo fare una previsione sul fatto che il lancio del dado dia come esito il numero 1.

- In entrambi i casi l'esito di un lancio è incerto.
- L'incertezza non è completa: *è più facile che esca 1 lanciando la moneta che lanciando il dado.*

Applicazioni della Teoria della Probabilità: gioco d'azzardo, emissioni di elettroni, chiamate telefoniche, controllo di qualità, meccanica statistica, ereditarietà, teoria dei giochi,. . .

Definizione di Probabilità

1. Definizione classica
2. Definizione frequentista
3. Definizione soggettiva
4. Definizione assiomatica

Definizione Classica

Supponiamo che un esperimento abbia N esiti possibili *incompatibili* tra di loro *equiprobabili* e che n di questi esiti siano favorevoli al verificarsi di un certo evento E. Si definisce probabilità $p(E)$ dell'evento il rapporto

$$p(E) = \frac{n}{N} = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili}$$

(esiti incompatibili: se se ne verifica uno non può verificarsene l'altro)

ESEMPIO - Supponiamo di lanciare un dado non truccato:

1. la probabilità che esca 1 è $1/6$
2. la probabilità che esca un numero maggiore di 2 è $4/6 = 2/3$
3. la probabilità che esca un numero pari è $3/6 = 1/2$

Definizione Classica - Esempi

ESEMPIO - 1 Qual è la probabilità che sabato prossimo il primo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57 ? Poichè il primo estratto sulla ruota di Napoli è scelto tra 90 numeri *(equiprobabili)*,i casi possibili sono 90 e quello favorevole è 1, dunque la probabilità risulta essere $1/90$.

ESEMPIO - 2 Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57 ? Il medesimo ragionamento, usato nell'esempio precedente, porta a concludere che la probabilità è ancora $1/90$.

ESEMPIO - 3 Qual è la probabilità che sabato prossimo il secondo estratto sulla ruota di Napoli sia il numero 57, sapendo che il primo estratto non è il numero 57 ? Dopo la prima estrazione i numeri disponibili non sono più 90, ma 89 e quindi la probabilità è $1/89$.

(Sapendo che il primo estratto è proprio il 57, la la probabilità risulta 0, perchè dopo la prima estrazione il 57 non è più disponibile.)

La probabilità dipende dall'informazione a disposizione di chi la calcola !

Definizione Classica - Esercizi

ESERCIZIO - 1 Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 5 ?

casi possibili : tutte le coppie *(equiprobabili)* ordinate di numeri naturali fra 1 e 6

casi favorevoli: le coppie ordinate $(1,4)$, $(2,3)$, $(3,2)$, $(4,1)$

$$\Rightarrow \ probabilità = \frac{numero\ di\ casi\ favorevoli}{numero\ di\ casi\ possibili} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

NOTA - La somma delle uscite di due dadi è un numero compreso fra 2 e 12. Avrei potuto considerare come casi possibili i numeri compresi tra 2 e 12, ma non sarebbe stato possibile applicare la definizione classica, in quanto tali somme non sono equiprobabili: per esempio il numero 2 si ottiene solo come somma di 1 dal primo dado e 1 dal secondo mentre il numero 4 si può ottenere come $1+3$, $2+2$, $3+1$..

ESERCIZIO - 2 Qual è la probabilità che, lanciando contemporaneamente due dadi, la somma delle uscite sia 7 ? che sia 12 ? [*risposte*: 1/6 , 1/36]

Definizioni di Probabilità

DEFINIZIONE FREQUENTISTA - La probabilità di un evento E, per esempio l'uscita di testa nel lancio di una moneta, è il limite a cui tende il rapporto n/N dove n è il numero di teste e N è il numero di lanci totali, quando N tende all'infinito. La probabilità $p(E)$ dell'evento è il limite delle frequenze relative: $p(E) = \lim_{N \to +\infty} \frac{F_{ass}}{N}$

DEFINIZIONE SOGGETTIVA - Considerato un evento E, la probabilità $p(E)$, che un soggetto attribuisce all'evento E, è un numero reale che misura il grado di fiducia che un individuo *coerente* attribuisce, secondo le sue informazioni e opinioni, all'avverarsi di E.

DEFINIZIONE ASSIOMATICA - Si definisce la misura di probabilità su uno spazio degli eventi Ω, tramite alcune proprietà *(assiomi)*.

Probabilità - Proprietà

Sia Ω un insieme finito, che chiameremo *spazio degli eventi*. Si dice *evento* un qualunque sottoinsieme di Ω. Una misura di *probabilità* su Ω è una funzione p che associa ad ogni sottoinsieme E di Ω un numero reale tale che:

1. $0 \leq p(E) \leq 1$ per ogni $E \subseteq \Omega$
2. $p(\Omega) = 1$ *(evento certo)*, $p(\emptyset) = 0$ *(evento impossibile)*
3. per ogni coppia di sottoinsiemi E, F contenuti in Ω, tali che $E \cap F = \emptyset$ *(eventi incompatibili)*, vale: $p(E \cup F) = p(E) + p(F)$

EVENTO ELEMENTARE: ogni sottoinsieme di Ω formato da un unico elemento

EVENTI INCOMPATIBILI: E, F sono incompatibili se il verificarsi dell'uno esclude il verificarsi dell'altro: $E \cap F = \emptyset$

EVENTO COMPLEMENTARE: il complementare di E è l'evento che si verifica quando E non si verifica (la probailità del compementare e $1 - p(E)$).

Probabilità - Esempi

ESEMPIO - 1 Nel lancio di un dado:

- lo spazio degli eventi è $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\{2, 3\} = \{esce\ 2\ o\ 3\}$ e $\{3, 6\} = \{esce\ un\ multiplo\ di\ 3\}$ sono eventi
- l'evento $\{2\} = \{esce\ il\ numero\ 2\}$ è un evento elementare
- l'evento $\{2, 4, 6\} = \{esce\ un\ numero\ pari\}$ non è un evento elementare

ESEMPIO - 2 Nel lancio di una moneta $\Omega = \{TESTA, CROCE\}$. L'evento complementare di $\{TESTA\}$ è $\{CROCE\}$. I due evento sono incompatibili.

ESEMPIO - 3 Nel lancio di un dado:

- l'evento complementare di $\{2, 4, 6\} = \{esce\ un\ numero\ pari\}$ è $\{1, 3, 5\} = \{esce\ un\ numero\ dispari\}$
- l'evento complementare di $\{4\} = \{esce\ il\ numero\ 4\}$ è $\{1, 2, 3, 5, 6\} = \{esce\ un\ numero\ diverso\ da\ 4\}$
- gli eventi $\{esce\ un\ numero\ pari\}$ e $\{esce\ il\ numero\ 5\}$ sono incompatibili
- gli eventi $\{esce\ un\ numero\ pari\}$ e $\{esce\ un\ multiplo\ di\ 3\}$ sono compatibili

Probabilità - Esercizi - 1

ESERCIZIO - In un'urna ci sono 4 palline nere e 5 bianche. Ne estraiamo una. Qual è la probabilità che sia bianca?

SOLUZIONE - Indichiamo con N_1, N_2, N_3, N_4 le 4 palline nere e con B_5, B_6, B_7, B_8, B_9 le 5 palline bianche.

$$\Omega = \{N_1, ..., N_4,\ B_5, ...,\ B_9\}$$

Poichè non c'è trucco:

$$p(N_1) = p(N_2) = \cdots = p(B_5) = ...p(B_9) = \frac{1}{9}$$

Dobbiamo calcolare

$$p\{B_5,\ ..., B_9\} = p(B_5) + ... + p(B_9) = \frac{5}{9}$$

La probabilità che la pallina estratta sia bianca è $\dfrac{5}{9}$

Probabilità - Esercizi - 2

ESERCIZIO - Nelle ipotesi dell'esercizio precedente estraiamo prima una pallina senza guardarla. Successivamente ne estraiamo un'altra, sempre senza guardare la prima. Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

SOLUZIONE 1 - Possiamo scegliere come Ω l'insieme di tutte le coppie *ordinate* di palline. Tale spazio degli eventi contiene $9 \cdot 8 = 72$ elementi. Ciascun elemento, per simmetria, ha esattamente probabilità $1/72$.

L'insieme di cui dobbiamo trovare la probabilità è formato dalle coppie con la seconda pallina bianco e quindi contiene $4 \cdot 5 + 5 \cdot 4 = 40$ elementi.

La sua probabilità è $\quad \dfrac{1}{72} \cdot 40 = \dfrac{5}{9}$

SOLUZIONE 2 - L'operazione effettuata prima della seconda estrazione è assolutamente ininfluente *(non fornisce alcuna informazione)*. In questo ottica lo spazio degli eventi è

$$\Omega' = \{N_1, ..., N_4,\ B_5, ...,\ B_9\}$$

La probabilità di ogni elemento è $1/9$.

L'evento di cui vogliamo calcolare la probabilità è $\{B_5, ...,\ B_9\}$

Probabilità - Esercizi - 3

ESERCIZIO - Nelle ipotesi dell'esercizio precedente, supponiamo di guardare la prima pallina estratta e scoprire che è bianca. Qual'è la probabilità che la seconda pallina sia bianca?

SOLUZIONE - Lo spazio degli eventi *relativo alla seconda estrazione* contiene solo 4 palline bianche e 4 nere.

La probabilità cercata è pertanto $\dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$.

COMMENTI

- **La scelta dello spazio degli eventi non è unica. Tale spazio non è assegnato a priori dal problema, ma fa parte del modello matematico.**
- **La probabilità dipende in modo essenziale dall'informazione a disposizione di chi la calcola.**