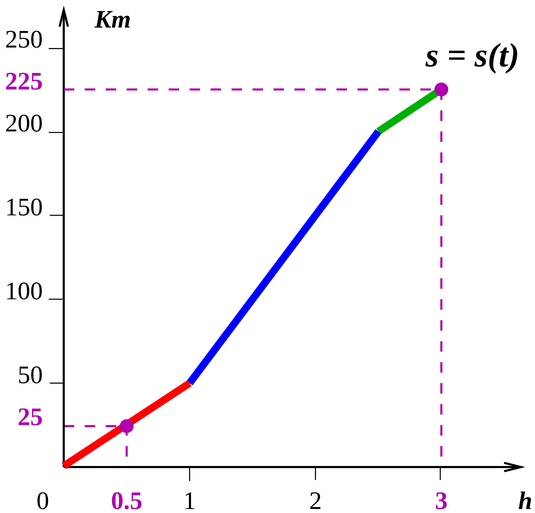
Velocità



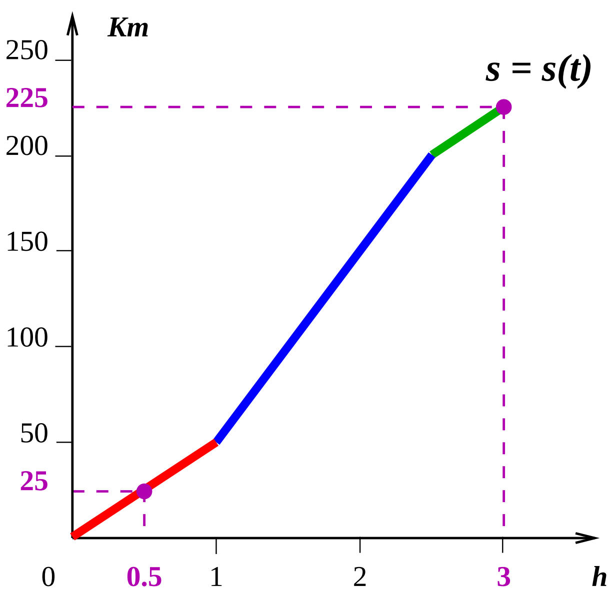
VELOCITÀ MEDIA:

VELOCITÀ ISTANTANEA:

Velocità 1

MOTO RETTILINEO UNIFORME:

$s(t) = s_0 + v \cdot (t - t_0)$



LEGGE DI MOTO:

$$s(t) = \begin{cases} 50\ t & \text{per } t \in [\ 0, 1\ ] \\ 50 + 100\ (t-1) & \text{per } t \in (1, 2.5\ ) \\ 200 + 50\ (t - 2.5) & \text{per } t \geq 2.5 \end{cases}$$

VELOCITÀ MEDIA:

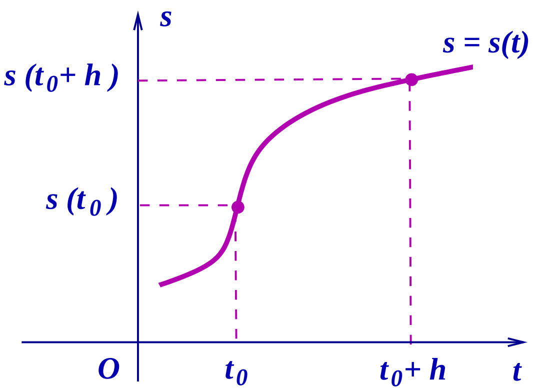
$$v_{media} = \frac{s(3) - s(0.5)}{3 - 0.5} = \frac{200}{2.5} = 80\ km/h.$$

velocità media sull'intervallo $[\ 0.5, 3\ ]$

VELOCITÀ ISTANTANEA:

- per $t = 0.5$ $v_{istantanea} = 50\ km/h$
- per $t = 2$ $v_{istantanea} = 100\ km/h$
- per $t = 3$ $v_{istantanea} = 50\ km/h.$

Velocità 2



più h è vicino a 0, più piccolo è l'intervallo di tempo considerato e piú precisa l'informazione sull' andamento della velocità.

- VELOCITÀ MEDIA:

$$v_{media} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità media sull'intervallo $[\ t_0, t_0 + h\ ]$.

- VELOCITÀ ISTANTANEA:

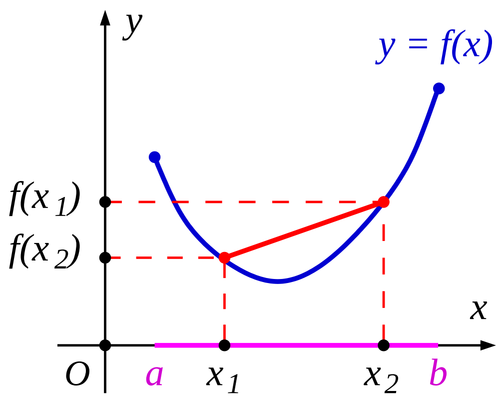
$$v_{istantanea} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}$$

velocità all'istante t_0.

- ESEMPIO:
sia $s(t) = s_0 + v\ t$ allora si ha:

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{s(t + h) - s(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{v\ h}{h} = v$$

CONVESSITÀ SU UN INTERVALLO



f è *convessa* in $(a,\ b)$ se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \le \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,\ b)$ e per ogni $\lambda \in [0,\ 1]$

(presi comunque due punti sul grafico di f , il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico).

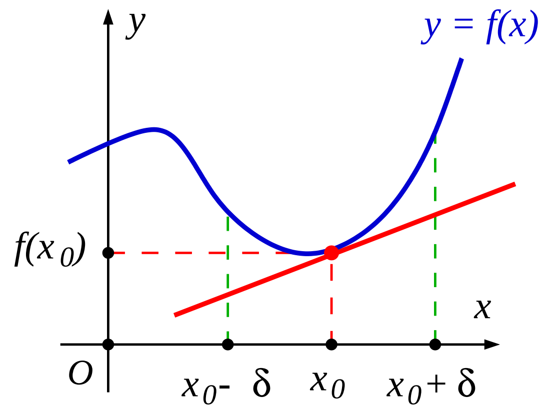
f è *concava* in $(a,\ b)$ se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \ge \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,\ b)$ e per ogni $\lambda \in [0,\ 1]$

(presi comunque due punti sul grafico di f , il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico).

CONVESSITÀ IN UN PUNTO



f è *convessa* in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \ge f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ ,\quad \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

(vicino al punto x_0 il grafico sta tutto *sopra* la retta tangente).

f è *concava* in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \le f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ ,\quad \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

(vicino al punto x_0 il grafico sta tutto *sotto* la retta tangente).

Criterio di Convessità

- NOTA: Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile.
  f è convessa in $(a,\ b)$ se e solo se è convessa in ogni punto di $(a,\ b)$.
  f è concava in $(a,\ b)$ se e solo se è concava in ogni punto di $(a,\ b)$.
- CRITERIO DI CONVESSITÀ:
  se $y = f(x)$ è una funzione derivabile due volte in $(a,\ b)$, si ha:
  $f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a,\ b) \;\Rightarrow\; f \quad \textit{convessa in } (a,\ b)$
  $f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a,\ b) \;\Rightarrow\; f \quad \textit{concava in } (a,\ b).$
- ESEMPI: determinare la convessità delle seguenti funzioni:
  1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata seconda: $f''(x) = 2 \geq 0$, $\forall\, x$.
     Si conclude che: $f(x)$ è convessa per ogni x.
  2. $g(x) = e^{-x^2}$.
     Studiando il segno della derivata seconda:
     $$g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \textit{oppure} \quad x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
     si conclude che:
     $f(x)$ è concava per $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ed è convessa per $x \notin \left[\frac{-1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$.

Teoremi dell' Hôpital 1

- TEOREMA DELL'HÔPITAL:
  Siano $f,\ g$ due funzioni derivabili nell'intervallo aperto $(a,\ b)$, escluso al più il punto x_0 , tali che:
  $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$
  Se esiste il limite $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (g'(x) \neq 0 \ \ per \ x \neq x_0 \ )$
  allora esiste anche il limite:
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- ESTENSIONE:
  il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per $x \to \pm\infty$ e per le forme indeterminate $\dfrac{\infty}{\infty}$.

- ESEMPI:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2\ \cos 2x}=\frac{1}{2}$$
2. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log x}{x^5}=\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{5\ x^5}=0.$$
3. $$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^2}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty.$$

- ATTENZIONE:

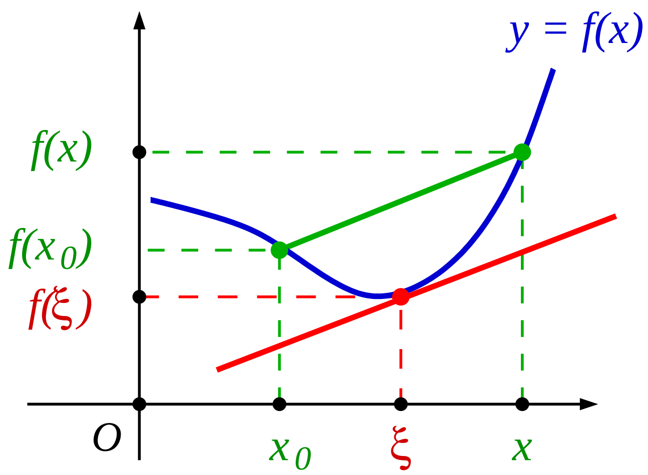
i teoremi dell'Hôpital servono quando il limite f'/g' esiste, in caso contrario non sono di alcuna utilità.

$$ad\ esempio: \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x+\cos x}{2x+1}=\frac{3}{2}\quad mentre \quad \nexists \lim_{x\to +\infty}\frac{3+\sin x}{2}.$$

Il teorema dei due carabinieri

Sono date tre funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ definite in un intorno del punto $x_0 \in \mathbf{R}$ tali che in un intorno di x_0 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e tali che $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l$, allora si può dimostrare che $\lim_{x \to x_0} g(x) = l$.

Teorema del Valor Medio



FORMULA DI TAYLOR DI GRADO 0

$f(x) = f(x_0) + f'(\xi)(x - x_0)$, $\xi \in (x_0,\ x)$

(con resto nella forma di Lagrange)

- TEOREMA DEL VALOR MEDIO *(di Lagrange)*

  Sia f derivabile in $(a,\ b)$ e siano $x_0,\ x$ due punti appartenenti all'intervallo. Allora esiste un punto ξ strettamente compreso tra x_0 ed x tale che:

  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(\xi).$$

  ovvero la retta tangente nel punto $(\xi,\ f(\xi))$ é parallela alla retta secante per i punti $(x_0,\ f(x_0))$ e $(x,\ f(x))$.

- CONSEGUENZA:
  Sia f derivabile in $(a,\ b)$. Se $f'(x) = 0$ per ogni punto $x \in (a,\ b)$ allora $f(x)$ è *costante* in $(a,\ b)$.

  NOTA BENE:
  è essenziale che f sia definita su un *intervallo*. Infatti la funzione

  $$y = \frac{|x|}{x} \quad , x \neq 0$$

  ha derivata nulla ovunque ma non è costante.

Approssimazione di $f(x)$ con Polinomi

- POLINOMIO DI GRADO 0: $f(x) \approx f(x_0)$.
- POLINOMIO DI GRADO 1: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

  La differenza $R_1(x) = f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]$ si chiama *RESTO* e tende a *zero* quando $x \to x_0$:

$$R_1(x) = [f(x) - f(x_0)] - f'(x_0)(x - x_0) \to 0$$

  Si può dimostrare che il *RESTO* tende a *zero* più rapidamente di $(x - x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_1(x)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \frac{f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \right] = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

- POLINOMIO DI GRADO 2: $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2$.
- POLINOMIO DI TAYLOR DI GRADO n:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

  dove $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n - 1) \cdot n$

Formula di Taylor

Sia f una funzione derivabile fino all'ordine n nell'intervallo (a,b). Vale la seguente *formula di Taylor* di ordine n, centrata nel punto x_0, con resto in forma di Peano:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

Il resto gode della proprietà:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

cioè tende a *zero* più rapidamente di $(x-x_0)^n$.

Se la funzione f è derivabile fino all'ordine $n+1$, il resto può essere espresso nella forma di Lagrange:

$$R_n(x) = f^{(n+1)}(\xi)\ \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

NOTA: la formula di Taylor in forma compatta:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0)\,\frac{(x-x_0)^k}{k!} + R_n(x) \qquad ,\ k! = 1\cdot 2 \cdots (k-1)\cdot k.$$