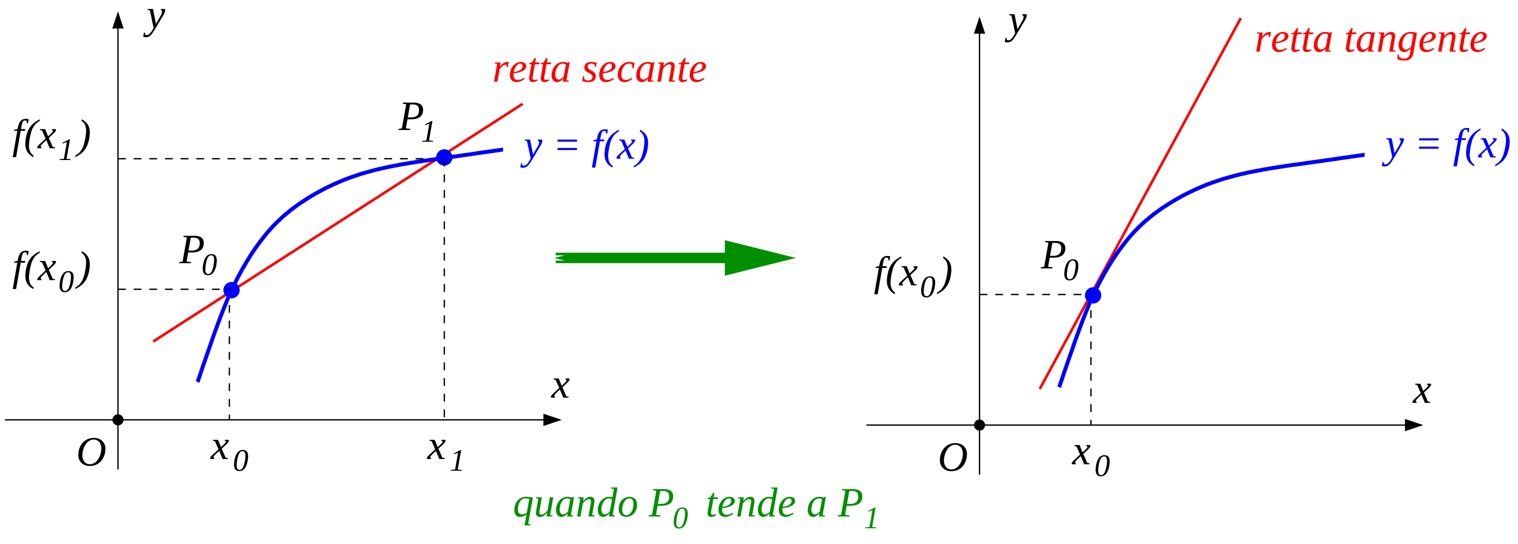
Retta Tangente 1



- consideriamo una funzione continua $y = f(x)$ e siano $P_0 = (x_0, f(x_0))$ e $P_1 = (x_1, f(x_1))$ due punti appartenenti al grafico della funzione;
- al tendere di x_1 a x_0 il punto P_1 si avvicina al punto P_0 e la retta secante tende ad assumere una posizione limite che prende il nome di retta tangente al grafico nel punto P_0.

Retta Tangente 2

- l'equazione della retta secante per i due punti P_0 , P_1 è data da:

$$y = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \, (x - x_0) + f(x_0)$$

- l'espressione del coefficiente angolare

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

  si chiama *rapporto incrementale* della funzione $f(x)$ nel punto x_0

- se esite finito, il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(x_0)$$

  rappresenta il coefficiente angolare della *retta tangente* di equazione:

$$y = f'(x_0) \, (x - x_0) + f(x_0)$$

- il limite $f'(x_0)$ è per definizione *la derivata prima* di $f(x)$ in x_0

Derivate - Definizione

- se esiste finito il limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

  la funzione $y = f(x)$ si dice DERIVABILE in x_0

- il valore del limite è per definizione la DERIVATA di $y = f(x)$ nel punto x_0

- la derivata si indica con le seguenti notazioni:

$$f'(x_0) \ , \ y'(x_0) \ , \ \frac{d\ f}{d\ x}(x_0) \ , \ \frac{d\ y}{d\ x}(x_0) \ , \ Df(x_0).$$

- nel lucido precedente $\Delta x = x_1 - x_0$ e $x_1 = x_0 + \Delta x$

Derivate - Esempi

ESEMPIO 1: $f(x) = c$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c-c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

ESEMPIO 2: $f(x) = m\ x + q$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m\ (x+h) + q - mx - q}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{m\ h}{h} = m$$

ESEMPIO 3: $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 2\,x\,h}{h} = 2\,x$$

Derivate - Operazioni

siano $f(x)$, $g(x)$ due funzioni *derivabili* e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- PRODOTTO PER UNA COSTANTE:

$$(\alpha f)'(x) = \alpha\ f\ '(x)$$

- SOMMA:

$$(f+g)'(x) = f\ '(x) + g\ '(x)$$

- PRODOTTO:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

- QUOZIENTE:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

Derivata - Operazioni

1. $y = x^3 = x \cdot x^2; \quad y' = 1 \cdot x^2 + x \cdot 2x = 3x^2$
2. iterando il procedimento se $y = x^n$ si ha $y' = n\, x^{n-1}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
3. $y = 5\,x^3 - 3\,x^2 + 10\,x - 7; \quad y' = 15\,x^2 - 6\,x + 10$
4. $y = x^2 + e^{\,x}; \qquad y' = 2x + e^{\,x}$
5. $y = \log_e x\,\sqrt{x}; \qquad y' = \dfrac{1}{x}\sqrt{x} + \log_e x\,\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
6. $y = \dfrac{1}{x} \qquad y' = \dfrac{0\,x - 1}{x^2} = -\dfrac{1}{x^2}$
7. iterando il procedimento se $y = \dfrac{1}{x^n}$ si ha $y' = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$
8. $y = \dfrac{x^5 + 2}{e^{\,x}}; \qquad y' = \dfrac{5\,x^4\,e^{\,x} - (x^5 + 2)\,e^{\,x}}{(e^{\,x})^2}$

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA:

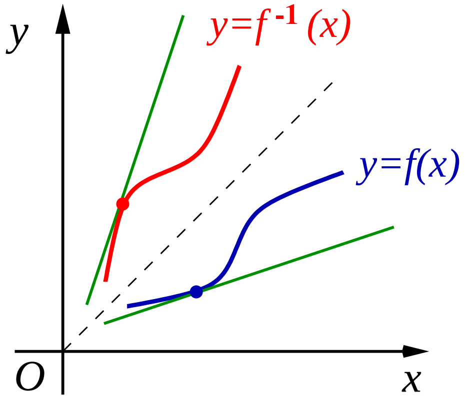
se g è una funzione derivabile in x e f una funzione derivabile in $g(x)$ allora:

$$(f \circ g)'(x) = \frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

ESEMPI:

1. $y = \sqrt{x^4 + 5x^3 + 1} \qquad y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^4 + 5x^3 + 1}} (4x^3 + 15x^2).$
2. $y = (8x^3 - 6x^2)^{10} \qquad y' = 10\,(8x^3 - 6x^2)^9\,(24x^2 - 12x)\,.$
3. $y = e^{\sqrt{x+2}} \qquad y' = -\dfrac{1}{2\sqrt{x+2}}\, e^{\sqrt{x+2}}.$

Derivata della Funzione Inversa



- i grafici di f ed f^{-1} sono simmetrici rispetto a $y = x$.
- le rette tangenti hanno coefficienti angolari, uno il reciproco dell'altro.

- consideriamo una funzione $x = f(y)$ *invertibile* e *derivabile* con $f'(y) \neq 0$ (senza punti a tangente orizzontale)
- la funzione inversa $y = f^{-1}(x)$ risulta *derivabile* e vale:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{d\ f^{-1}}{d\ x}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$\left[\frac{d\ f^{-1}}{d\ x}\right]_x = \frac{1}{\left[\frac{d\ f}{d\ y}\right]_{y=f^{-1}(x)}}$$

Derivata della Funzione Inversa - Esercizi

ESERCIZIO 1 - $y = f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ ,\ x = f(y) = y^2$

$$\left[\frac{d\ \sqrt{x}}{d\ x}\right]_x = \frac{1}{\left[\dfrac{d\ y^2}{d\ y}\right]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{[2\,y]_{y=\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO 2 - $y = f^{-1}(x) = \log x\ ,\ x = f(y) = e^y$

$$\left[\frac{d\ \log\ x}{d\ x}\right]_x = \frac{1}{\left[\dfrac{d\ e^y}{d\ y}\right]_{y=\log\ x}} = \frac{1}{[e^y]_{y=\log\ x}} = \frac{1}{x}$$

Derivabilità e Continuità

- **DERIVABILITÀ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ**
  se f è derivabile in x_0 allora risulta continua in x_0.
  Per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, passando al limite nell'uguaglianza
  $$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$
  si ricava la continuità in x_0
  $$\lim_{x\to x_o}(f(x)-f(x_0)) = f'(x_0)\cdot 0 = 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$
- **CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ**
  1. $y=|x|$ *(punto angoloso)*
  2. $y=\sqrt[3]{x^2}$ *(punto cuspidale)*
  3. $y=\begin{cases} 0 & \text{se } x=0 \\ x\sin\frac{1}{x} & \text{se } x\neq 0 \end{cases}$

  tutte queste funzioni risultano continue, ma non derivabili, in $x=0$.