Derivabilità e Continuità

- **DERIVABILITÀ $\Rightarrow$ CONTINUITÀ**
  se f è derivabile in x_0 allora risulta continua in x_0.
  Per l'ipotesi di derivabilità $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$, passando al limite nell'uguaglianza
  $$f(x)-f(x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)$$
  si ricava la continuità in x_0
  $$\lim_{x\to x_o} (f(x)-f(x_0)) = f'(x_0)\cdot 0 = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **CONTINUITÀ $\not\Rightarrow$ DERIVABILITÀ**
  1. $y = |x|$ *(punto angoloso)*
  2. $y = \sqrt[3]{x^2}$ *(punto cuspidale)*

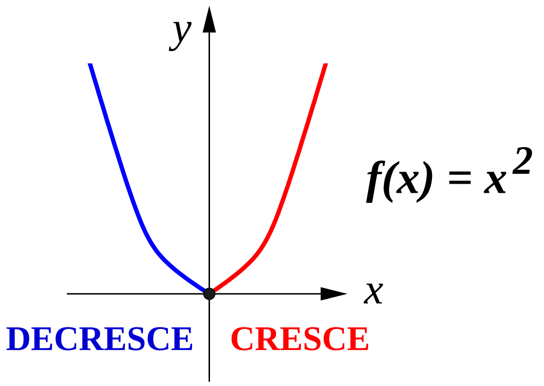
  tutte queste funzioni risultano continue, ma non derivabili, in $x = 0$.

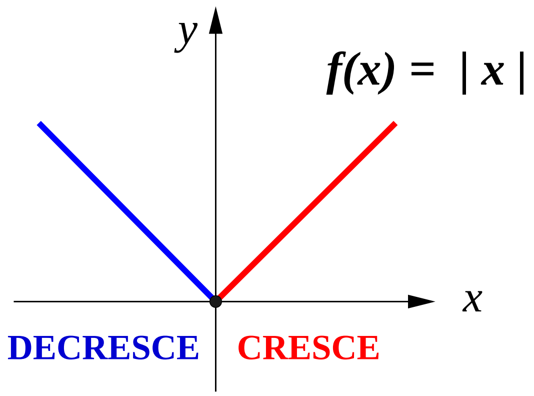
- CRITERIO DI MONOTONIA:
  se $y = f(x)$ è una funzione continua e derivabile in $(a,\ b)$, si ha:
  $$f'(x) \geq 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \ \ \textit{debolmente crescente in } (a,\ b)$$
  $$f'(x) \leq 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \iff f \ \ \textit{debolmente decrescente in } (a,\ b)$$

- NOTA: per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:
  $$f'(x) > 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \ \ \textit{strettamente crescente in } (a,\ b)$$
  $$f'(x) < 0 \quad \forall\ x \in (a,\ b) \Rightarrow f \ \ \textit{strettamente decrescente in } (a,\ b)$$
  non valgono le implicazioni inverse, basta considerare $f(x) = x^3$, che è strettamente crescente ma $f'(0) = 0$.

- ESEMPI: determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti.
  1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata: $f'(x) = 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$
     si conclude che: $f(x)$ è decrescente per $x < 0$ ed è crescente per $x > 0$.
  2. $g(x) = (x^2 - 3)e^x$. Si ha: $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ *oppure* $x \geq 1$
     quindi: $f(x)$ è decrescente per $x \in (-3,\ 1)$ ed è crescente per $x \notin [-3,\ 1]$.

Criterio di Monotonia 2

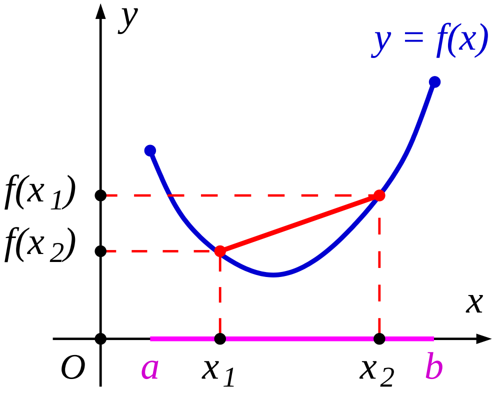




- $x < 0 \qquad f'(x) = 2x < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0 \qquad f'(x) = 2x > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0 \quad f'(0) = 0$
  punto di minimo relativo

- $x < 0 \qquad f'(x) = -1 < 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *decrescente*
- $x > 0 \qquad f'(x) = +1 > 0$
  $\Rightarrow f(x)$ *crescente*
- $x = 0 \qquad \nexists f'(0)$
  punto di minimo relativo

CONVESSITÀ SU UN INTERVALLO



f è *convessa* in $(a,\ b)$ se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,\ b)$ e per ogni $\lambda \in [0,\ 1]$

(presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico).

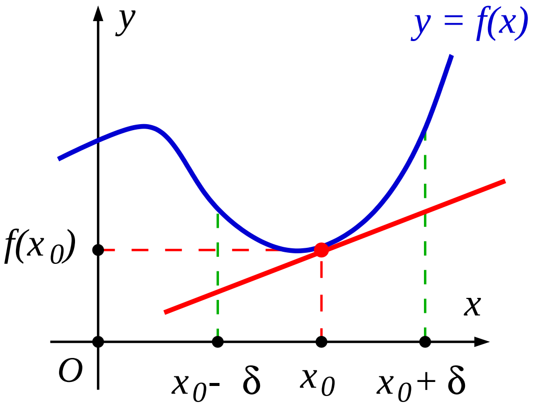
f è *concava* in $(a,\ b)$ se

$$f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \geq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

per ogni $x_1, x_2 \in (a,\ b)$ e per ogni $\lambda \in [0,\ 1]$

(presi comunque due punti sul grafico di f, il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico).

CONVESSITÀ IN UN PUNTO



f è *convessa* in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ ,\quad \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

(vicino al punto x_0 il grafico sta tutto *sopra* la retta tangente).

f è *concava* in x_0 se esiste $\delta > 0$ tale che

$$f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0)\ ,\quad \forall\, x \in (x_0 - \delta,\ x_0 + \delta)$$

(vicino al punto x_0 il grafico sta tutto *sotto* la retta tangente).

Criterio di Convessità

- NOTA: Sia $y = f(x)$ una funzione derivabile.
  f è convessa in (a, b) se e solo se è convessa in ogni punto di (a, b).
  f è concava in (a, b) se e solo se è concava in ogni punto di (a, b).
- CRITERIO DI CONVESSITÀ:
  se $y = f(x)$ è una funzione derivabile due volte in (a, b) , si ha:
  $$f''(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \;\Rightarrow\; f \;\; \textit{convessa in } (a, b)$$
  $$f''(x) \leq 0 \quad \forall\, x \in (a, b) \;\Rightarrow\; f \;\; \textit{concava in } (a, b).$$
- ESEMPI: determinare la convessità delle seguenti funzioni:
  1. $f(x) = x^2$. Studiando il segno della derivata seconda: $f''(x) = 2 \geq 0$, $\forall\, x$.
     Si conclude che: $f(x)$ è convessa per ogni x.
  2. $g(x) = e^{-x^2}$.
     Studiando il segno della derivata seconda:
     $$g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \;\Rightarrow\; x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \;\; \textit{oppure} \;\; x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
     si conclude che:
     $f(x)$ è concava per $x \in \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$ ed è convessa per $x \notin \left[\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$.

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI. Sia $f : A \to \mathbb{R}$:

- x_0 si dice *punto di massimo assoluto* se $f(x_0) \geq f(x)$, *per ogni* $x \in A$
- x_0 si dice *punto di minimo assoluto* se $f(x_0) \leq f(x)$, *per ogni* $x \in A$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. Sia f una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato* $[a,\ b]$, allora esitono il massimo ed il minimo assoluti di f in $[a,\ b]$.

CONTROESEMPI: osserviamo che le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema:

1. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$ *per* $x \in [-1,\ 1]$ e non ha minimo. La funzione non è *continua*.
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *per* $x \in (0,\ 1]$ non ha massimo. L'intervallo non è *chiuso*.
3. $f(x) = e^x$ *per* $x \in (-\infty,\ 0]$ non ha minimo. L'intervallo non è *limitato*.

PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALI (RELATIVI). Sia $f : A \to \mathbb{R}$:

- x_0 si dice *punto di massimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \leq f(x_0) \ , \quad per\ ogni\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
- x_0 si dice *punto di minimo locale* se esiste $\delta > 0$ tale che
$$f(x) \geq f(x_0) \ , \quad per\ ogni\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

TEOREMA DEI PUNTI CRITICI (FERMAT). Sia f una funzione definita su un intervallo $[a,\ b]$ e sia x_0 un punto di massimo o di minimo locale. Se $x_0 \in (a,\ b)$ e se f è *derivabile* in x_0, allora $f'(x_0) = 0$.

PUNTI CRITICI. I punti x_0 in cui si annulla la derivata prima, tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo locali interni, si dicono *stazionari* o *critici.*

CRITERIO DELLA DERIVATA SECONDA. Sia f una funzione derivabile due volte nell'intervallo $(a,\ b)$ e sia x_0 un *punto critico*:

1. se $f''(x_0) > 0$ allora x_0 è un punto di minimo locale
2. se $f''(x_0) < 0$ allora x_0 è un punto di massimo locale.

Funzioni definite su un intervallo chiuso e limita

1. Vedere se la funzione è continua e trovare gli eventuali punti di discontinuità;
2. Vedere se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile;
3. Se la funzione è continua essa ha certamente massimi e minimi (vedi teorema di Weierstrass);
4. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$ sono i seguenti:
   - estremi dell'intervallo: a, b;
   - valori $z \in]a, b[$ in cui la funzione non è derivabile, indichiamo con $A = \{z \ : \ \nexists f'(z)\}$;
   - valori $\bar{x} \in]a, b[$ in cui la funzione è derivabile e $f'(\bar{x}) = 0$, indichiamo con $B = \{\bar{x} \ : f'(\bar{x}) = 0\}$

- Il valore massimo (assoluto) è il massimo di questo insieme:

  $\{f(a), f(b), f(z), f(\bar{x}) \quad | \, z \in A, \;\; \bar{x} \in B\}$
- I punti di massimo sono i valori di x tali che $f(x)$ vale il valore massimo.
- Il valore massimo è unico
- I punti di massimo non sono necessariamente unici

- TEOREMA DELL'HÔPITAL:

  Siano f, g due funzioni derivabili nell'intervallo aperto $(a,\ b)$, escluso al più il punto x_0 , tali che:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

  Se esiste il limite $$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (\ g'(x) \neq 0 \quad per\ x \neq x_0\ )$$

  allora esiste anche il limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- ESTENSIONE:

  il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per $x \to \pm\infty$ e per le forme indeterminate $\frac{\infty}{\infty}$.

- ESEMPI:

1. $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\ \cos 2x} = \frac{1}{2}$$
2. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^5} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{5\ x^5} = 0.$$
3. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

- ATTENZIONE:

i teoremi dell'Hôpital servono quando il limite f'/g' esiste, in caso contrario non sono di alcuna utilità.

$$ad\ esempio: \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{3x + \cos x}{2x+1} = \frac{3}{2} \quad mentre \quad \nexists \lim_{x\to+\infty} \frac{3 + \sin x}{2}.$$

Il teorema dei due carabinieri

Sono date tre funzioni $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ definite in un intorno del punto $x_0 \in \mathbf{R}$ tali che in un intorno di x_0 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, e tali che $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = l$, allora si può dimostrare che $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$.

ESEMPIO: vogliamo calcolare $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$. Si ha $\dfrac{-1}{x} \leq \dfrac{\cos x}{x} \leq \dfrac{1}{x}$ e poichè $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ anche $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x} = 0$