Funzione Composta

Date due funzioni $g : A \to B$ e $f : B \to C$ si può definire la funzione composta:

$$f \circ g : A \ \to \ C \qquad x \mapsto g(x) \mapsto f\ (g(x))$$

notazione funzionale $\quad y = f\ (g(x))$

La composizione ha senso se il valore $g(x)$ appartiene al dominio della funzione f.

Il dominio della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso.

ESEMPI:

1. $f(x) = \sqrt{x}\ ,\ g(x) = x^2 - 4 \ \Rightarrow\ f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}\ ,\ D = \{x \leq -2 \text{ o } x \geq 2\}$
2. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ ,\ g(x) = x - 7 \ \Rightarrow\ f(g(x)) = \dfrac{1}{x-7}\ ,\ D = \{x \neq 7\}$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}\ ,\ g(x) = x^2 + 1 \ \Rightarrow\ f(g(x)) = \dfrac{1}{x^2+1}\ ,\ D = \mathbb{R}$

Funzione Composta

1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x + 1$
   - Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione;
   - Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

   Soluzione $f(g(x)) = e^{2x+1}$, $g(f(x)) = 2e^x + 1$
2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$
   - Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione;
   - Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

   Soluzione: $f(g(x)) = (x + 1)^2$, $g(f(x)) = x^2 + 1$

Funzione Inversa 1

- una funzione BIUNIVOCA si dice INVERTIBILE
- se $f : A \to B$ è invertibile si definisce la funzione inversa f^{-1} come segue:

$$f^{-1} : B \to A \quad , \qquad x = f^{-1}(y)$$

$$\forall\ y \in B \to x \in A \ \text{ tale che } \ f(x) = y$$

un tale x esiste ed è unico perchè la funzione f è bunivoca.

- ESEMPI:

1. $y = f(x) = 2x + 1$; $\qquad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1)$; $\quad f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
2. $y = f(x) = x^2$; $\qquad f : (-\infty, 0] \to [0, +\infty)$
   $x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$; $\quad f^{-1} : [0, +\infty) \to (-\infty, 0]$

Funzione Inversa 2

- PROPRIETÀ:

  sia $f : A \to B$ invertibile e sia $f^{-1} : B \to A$ la sua funzione inversa.

  considero la funzione composta $f^{-1} \circ f$

  ($y = f^{-1}(f(x))$ *con notazione funzionale*)

  $$f^{-1} \circ f : x \in A \to f(x) = y \in B \to f^{-1}(y) = x \in A$$

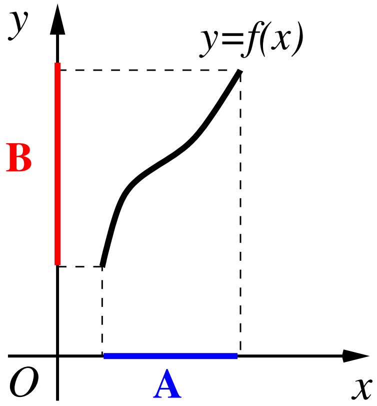
  $f^{-1} \circ f : A \to A \ , \quad x \to x$ *funzione identità*.

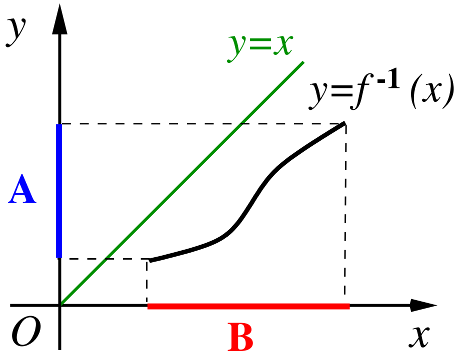
  la stessa cosa vale per $f \circ f^{-1}$

  $$f \circ f^{-1} : y \in B \to f^{-1}(y) = x \in A \to f(x) = y \in B$$

  $f \circ f^{-1} : B \to B \ , \quad y \to y$ *funzione identità*.

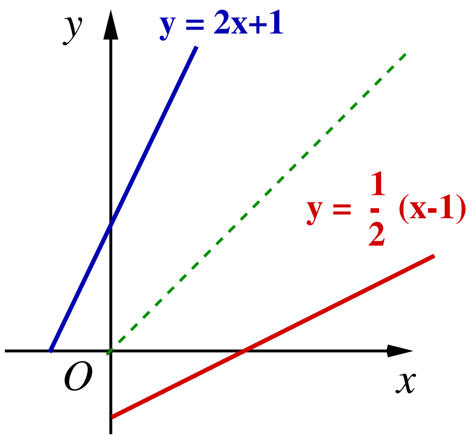
Funzione Inversa 3

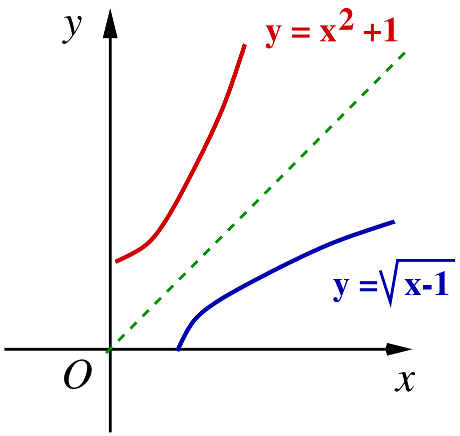




il grafico di $y = f^{-1}(x)$ si ottiene per simmetria rispetto a $y = x$.

ESEMPI:





Criterio di Invertibilità

- le funzioni strettamente monotone sono iniettive
- CRITERIO DI INVERTIBILITÀ se f è strettamente monotona e suriettiva allora f è invertibile
- se $f : A \to B$ è invertibile allora:

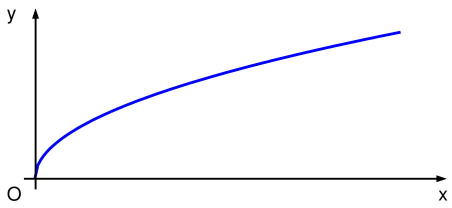
$$f \ crescente \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1} \ crescente$$

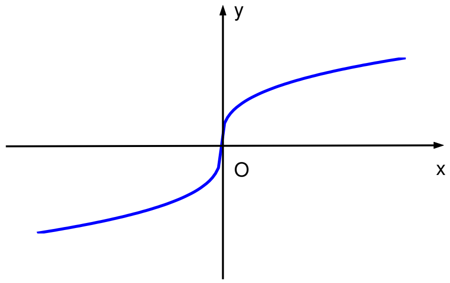
$$f \ decrescente \ \Leftrightarrow \ f^{-1} \ decrescente$$

Radici

INVERTIBILITÀ DELLA POTENZA: consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- se $n = 0$ la funzione $y = x^0 = 1$ è costante dunque *non invertibile.*
- se $n = 1$ la funzione $y = x$ è l'*identità*, con inversa uguale a se stessa.





- se $n = 2$ $y = x^2$ è *invertibile* in $\mathbb{R}_+$
- $y = \sqrt{x}$ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ è detta *radice quadrata.*

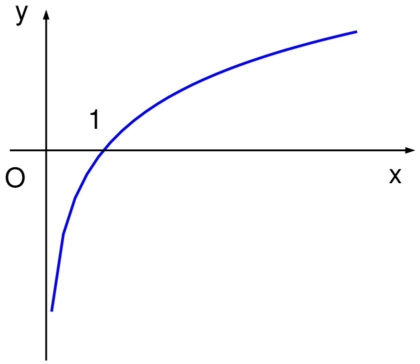
- se $n = 3$ $y = x^3$ è *invertibile* su tutto $\mathbb{R}$
- $y = \sqrt[3]{x}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è detta *radice cubica.*

In generale se n è *pari* si ragiona come per $n = 2$ e la funzione $y = x^n$ risulta invertibile su $\mathbb{R}_+$ $y = \sqrt[n]{x}$ $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $radice\ n - sima$

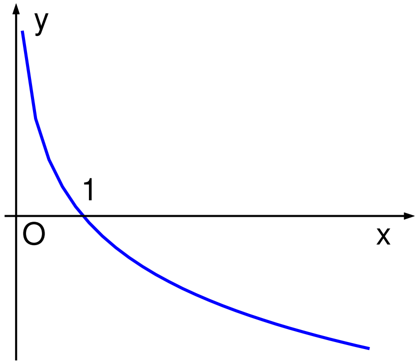
Viceversa se n è *dispari* si ragiona come per $n = 3$ e la funzione $y = x^n$ risulta invertibile su tutto $\mathbb{R}$. $y = \sqrt[n]{x}$ $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $radice\ n - sima$

Funzione Logaritmo

- $y = a^x \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad$ *strettamente monotona* $\Rightarrow$ *invertibile*
- $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_+ \mapsto x \in \mathbb{R} \ / \ a^x = y \ ; \quad x = f^{-1}(y) = \log_a y \ \ (logaritmo\ in\ base\ \ a\ \ di\ \ y)$



$y = \log_a x \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad per \quad a > 1$



$y = \log_a x \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \quad per \quad 0 < a < 1$

POPRIETÀ DEI LOGARITMI:

- $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \qquad \log_a\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_a(x^b) = b \ \log_a x \qquad \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$ *(cambio di base)*

Esercizi Funzione Composta 1

ESERCIZIO - [(A)] Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log_e(x-2)$

1. Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.
2. Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

SOLUZIONE :

1. La funzione composta è $f(g(x)) = e^{\log_e(x-2)} = x-2$. L'insieme di definizione è $x > 2$, poichè $g(x)$ è definita per $x > 2$.
2. La funzione composta è $g(f(x)) = \log_e(e^x - 2)$. L'insieme di definizione si ottiene ponendo: $e^x - 2 > 0$ da cui segue $x > \log_e 2$.

Esercizi Funzione Composta 2

ESERCIZIO 2 - Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \log_e x$

1. Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.
2. Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

SOLUZIONE :

1. La funzione composta è $f(g(x)) = -(\log_e x)^3$.

   L'insieme di definizione è $x > 0$, poichè $g(x)$ è definita per $x > 0$.

2. La funzione composta è $g(f(x)) = \log_e(-x^3)$.

   L'insieme di definizione è $-x^3 > 0$ da cui segue $x < 0$.

Funzione Inversa

1. Data la funzione $\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ così definita: $f(x) = -x + 3$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

   Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = 3 - y$ cioè $f^{-1}(x) = 3 - x$

2. Data la funzione $f(x) = x^3 + 2$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

   Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = (y - 2)^{\frac{1}{3}}$ cioè $f^{-1}(x) = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$

3. Data la funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

   Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è ne iniettiva ne suriettiva. per renderla suriettiva basta pensarla a valori in $\mathbf{R}^+$ e per renderla iniettiva basta per esempio restringerla a $[-1, +\infty)$, dunque la funzione $\mathbf{R}^+ \longrightarrow [-\mathbf{1}, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2+2x+1$ è invertibile e la sua inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$.