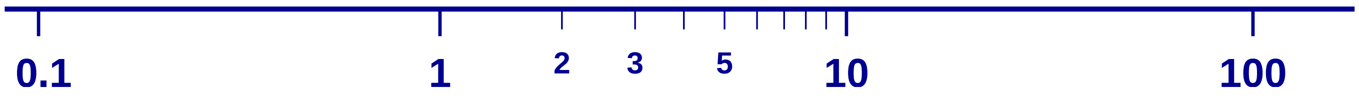
Scale Logaritmiche

SCALA LOGARITMICA:

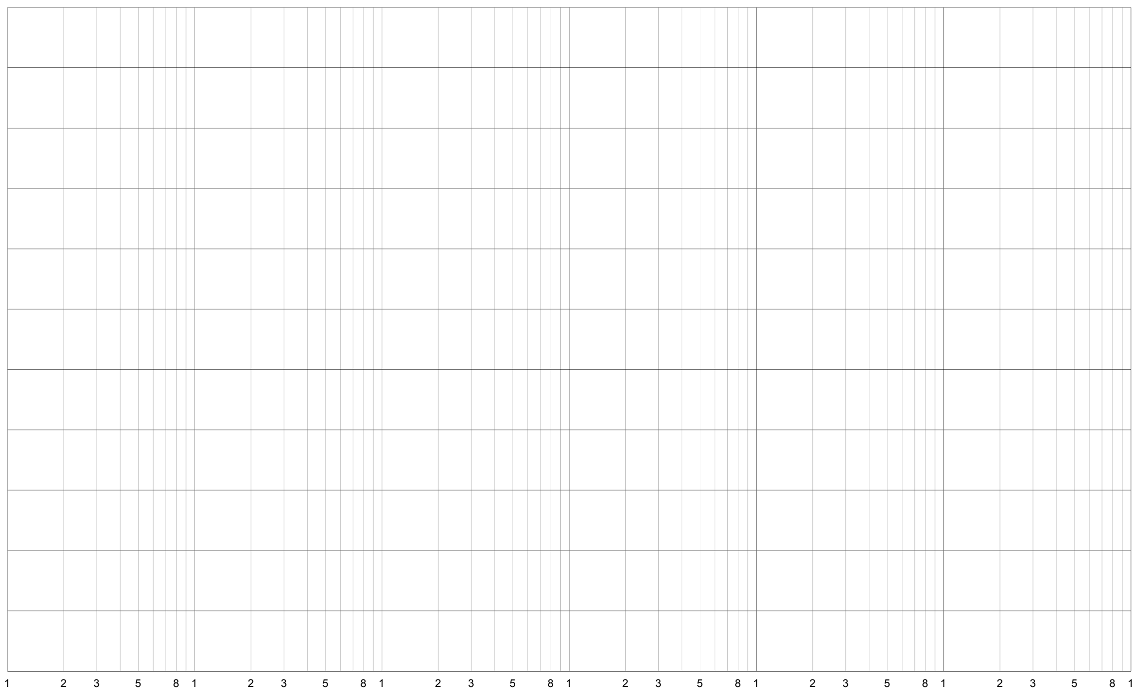
- sull'asse prescelto *(ad es. asse* x *)* si rappresenta il punto di ascissa $1 = 10^0$
- nella direzione positiva si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^1, 10^2, 10^3, \ldots$
- nella direzione negativa si rappresentano, a distanze uguali fra di loro, i punti di ascissa $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$
- i valori intermedi tra una potenza di 10 e la successiva *(ad.es.* $2, 3, \ldots 9$ *)* sono posizionati ai valori dei rispettivi logaritmi decimali



APPLICAZIONI:

- rappresentare misure *positive* con ordini di grandezza molto diversi fra loro
- linearizzare funzioni esponenziali $y = K \cdot a^x$ *scale semilogaritmiche*
- linearizzare funzioni potenza $y = A \cdot x^b$ *scale logaritmiche*

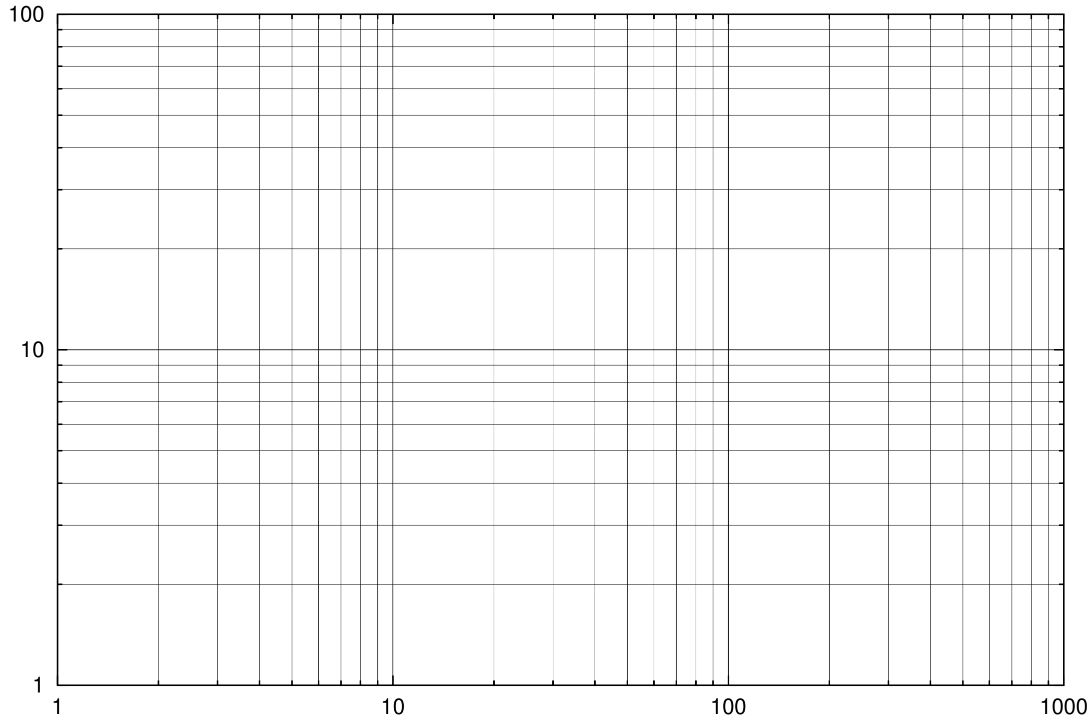
Carta SemiLogaritmica



CARTA SEMILOGARITMICA: scala lineare sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y *(o viceversa)*

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI: $X = x \qquad Y = \log_{10} y$

Carta Logaritmica



CARTA LOGARITMICA: scala logartimica sull'asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y

TRASFORMAZIONE DI VARIABILI: $X = \log_{10} x \qquad Y = \log_{10} y$

Carte SemiLogaritmiche

data la funzione esponenziale

$$y = K \cdot a^x$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi

$$\Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} [\, K \cdot a^x \,] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + x \cdot \log_{10} a$$

ponendo $\quad X = x \;$ e $\; Y = \log_{10} y$

$$Y = \log_{10} K + X \cdot \log_{10} a$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = \log_{10} a$ e intercetta $q = \log_{10} K$

Carte Logaritmiche

data la funzione potenza

$$y = K \cdot x^b$$

passando ai logaritmi decimali e utilizzando le proprietà dei logaritmi

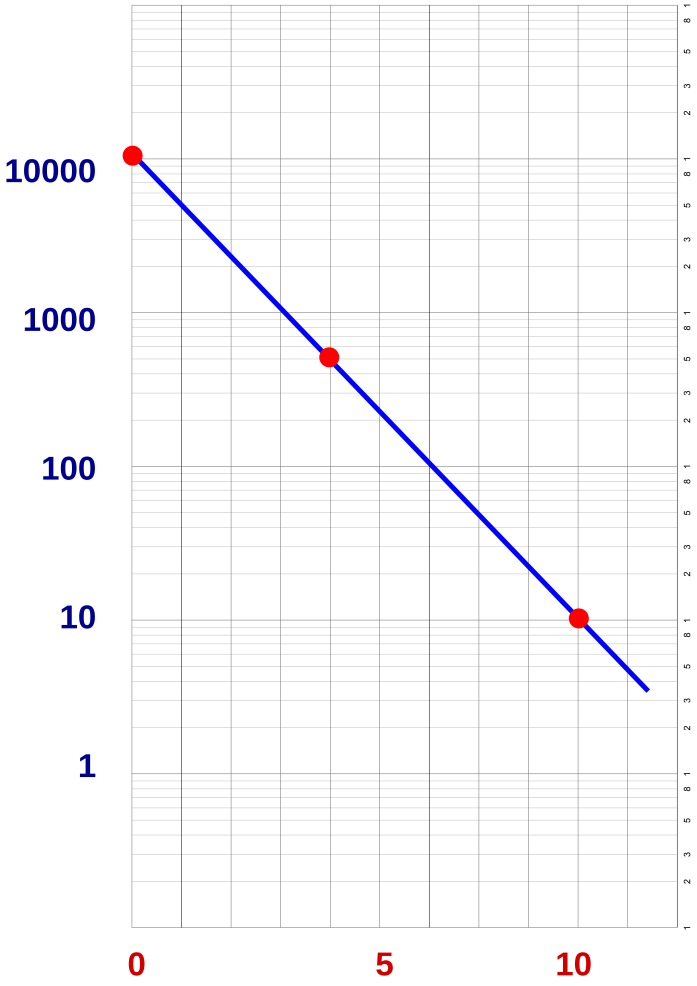
$$\Rightarrow \log_{10} y = \log_{10}[K \cdot x^b] \Rightarrow \log_{10} y = \log_{10} K + b \cdot \log_{10} x$$

ponendo $\quad X = \log_{10} x$ e $Y = \log_{10} y$

$$Y = \log_{10} K + b \cdot X$$

che è l'equazione di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare $m = b$ e intercetta $q = \log_{10} K$

Carta SemiLogaritmica - Esempio



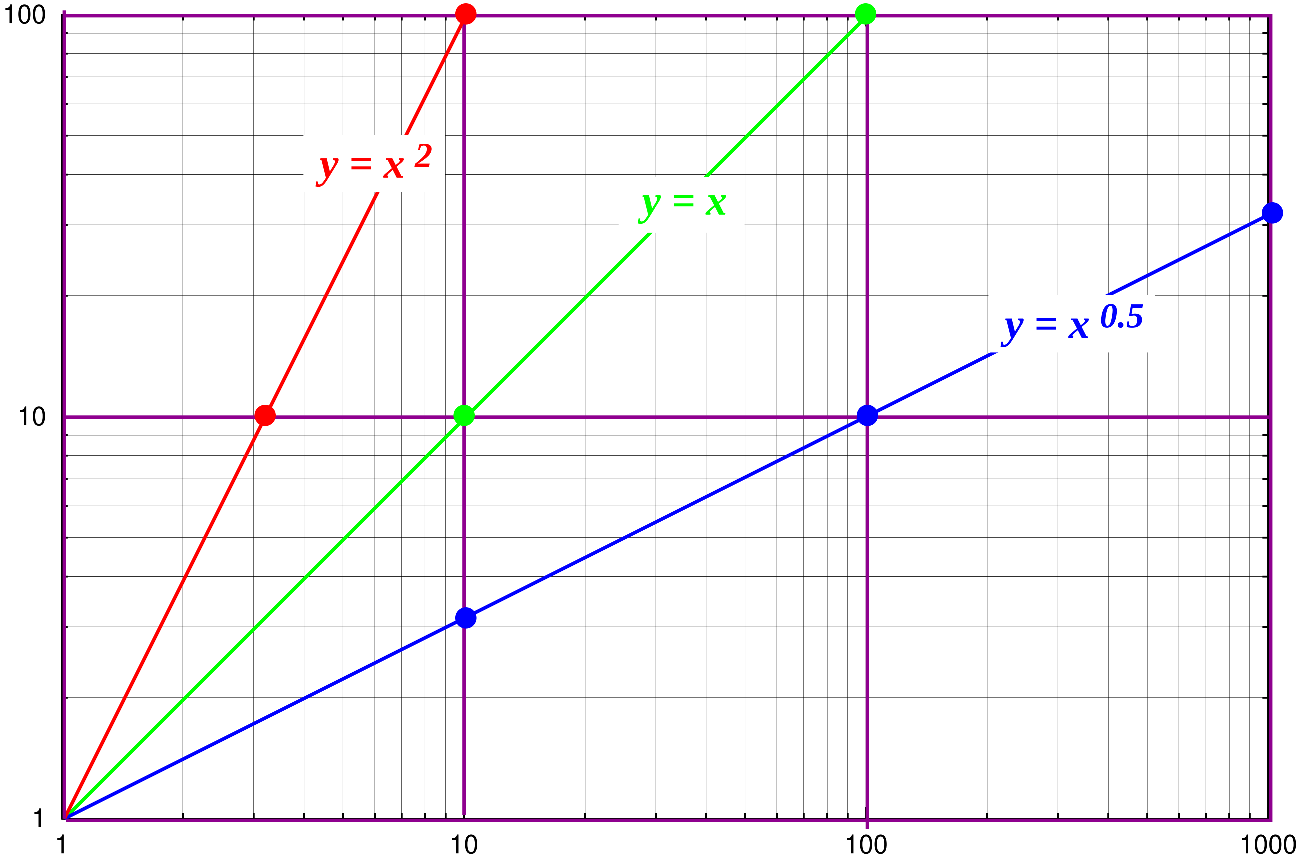
$$y = 10000\ (0.5)^{x}$$

$$\mathrm{Log}\ y = \mathrm{Log}(10000) + x\ \mathrm{Log}(0.5)$$

$$Y = 4 - (0.3)\ x$$

x	y	Y=Log y
0	10000	4
5	313	2.5
10	10	1

Carta Logaritmica - Esempio



Esercizi

ESERCIZIO 1 - *In un grafico con scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione* $Y = -\log_{10} 2 + (\log_{10} 3)X$. *Trovare il legame funzionale tra* x *e* y *dove* $X = x$ *e* $Y = \log_{10} y$.

$$\log_{10} y = -\log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10} 3^x - \log_{10} 2 = \log_{10} \frac{3^x}{2}$$

SOLUZIONE : $y = \dfrac{3^x}{2}$

Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta, su tale scala, la funzione $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$. *Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.*

$$\log_{10} y = \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x \cdot \log_{10} \frac{1}{3}$$

SOLUZIONE : $Y = \left[\log_{10} \left(\dfrac{1}{3}\right)\right] x \qquad m = -\log_{10} 3 < 0$

ESERCIZIO 2 - *In un grafico in scala semilogaritmica è rappresentata la retta di equazione* $Y = \log_{10} 2 + (\log_{10} 3)x$, *dove* $Y = \log_{10} y$. *Trovare il corrispondente legame funzionale tra* x *e* y .

$$\log_{10} y = \log_{10} 2 + x \cdot \log_{10} 3 = \log_{10}(2 \cdot 3^x)$$

SOLUZIONE : $y = 2 \cdot 3^x$

Rispondere alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = -\log_{10} 5 + 2X$, *dove* $X = \log_{10} x$.

$$\log_{10} y = -\log_{10} 5 + 2 \log_{10} x = \log_{10} \frac{x^2}{5}$$

SOLUZIONE : $y = \dfrac{x^2}{5}$

ESERCIZIO 3 - *Su carta semilogaritmica è assegnata la retta di equazione* $Y = \log_{10} 3 + (\log_{10} 4)x$, *dove* $Y = \log_{10} y$. *Trovare il corrispondente legame funzionale tra* x *ed* y .

Si risponda alla stessa domanda nel caso che sia assegnata su carta logaritmica la retta di equazione $Y = \log_{10} 5 + \frac{3}{2} X$, *dove* $X = \log_{10} x$.

ESERCIZIO 4 - *In un grafico con scala logaritmica (scala logaritmica sia sull'asse delle ascisse che sull'asse delle ordinate)*

- *È rappresentata la retta di equazione* $Y = -3X + 5$. *Trovare il legame funzionale tra* x *e* y *dove* $X = \log_{10} x$ *e* $Y = \log_{10} y$ *.*
- *Scrivere l'equazione della retta che rappresenta su tale scala la funzione* $y = (\sqrt{2x})^3$.

SOLUZIONE a: $\log_{10} y = -3\log_{10} x + 5$ quindi $y = 10^{-3\log_{10} x + 5} = 10^5(10^{\log_{10} x})^{-3} = \dfrac{10^5}{x^3}$ cioè $y = \dfrac{100000}{x^3}$.

SOLUZIONE b: $\log_{10} y = \log_{10}(2x)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}\log_{10} 2x$ e quindi la retta è $Y = \dfrac{3}{2}X + \dfrac{3}{2}\log_{10} 2$.

ESERCIZIO 5 - *In un grafico con scala semilogaritmica (scala normale sull' asse delle ascisse e scala logaritmica sull'asse delle ordinate)*

- *È rappresentata la retta di equazione* $Y = -\log_{10} 5 + (\log_{10} 2)X$ *. Trovare il legame funzionale tra* x *e* y *dove* $X = x$ *e* $Y = \log_{10} y$ *.*
- *Trovare il coefficiente angolare della retta che rappresenta su tale scala la funzione* $y = \left(\frac{3}{5}\right)^x$ *. Dire se tale coefficiente angolare è positivo o negativo.*

SOLUZIONE a: $\log_{10} y = x \cdot \log_{10} 2 - \log_{10} 5 = log_{10} 2^x - \log_{10} 5 = log_{10} \frac{2^x}{5}$ da cui $y = \frac{2^x}{5}$

SOLUZIONE b: $\log_{10} y = \log_{10}(\left(\frac{3}{5}\right)^x) = x \log_{10} \left(\frac{3}{5}\right)$ cioè $Y = (\log_{10} \frac{3}{5})X$ e quindi il coefficiente angolare è $\log_{10} \left(\frac{3}{5}\right)$