

Successioni 1

- vi sono fenomeni naturali e situazioni concrete che presentano sviluppi significativi in tempi **discreti**
- vale a dire è naturale che i controlli per quei dati fenomeni o per quelle date situazioni avvengano ad intervalli di tempo prefissati (di minuti, ore, giorni, anni, ...)
- ESEMPI:
 1. aumento dello stipendio di un lavoratore dipendente per effetto degli scatti di anzianità;
 2. crescita di un capitale investito ad un tasso fisso di interesse annuo;
 3. crescita di una popolazione di cellule;
 4. decadimento di una sostanza radioattiva.

Successioni 2 - Progressioni Aritmetiche

ESEMPIO 1: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del padrone)

- $S(0) = S$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari al 1.5% dello stipendio iniziale
- dopo un anno lo stipendio sarà $S(1) = S + \frac{1.5}{100} S$
- dopo 2 anni lo stipendio sarà $S(2) = S(1) + \frac{1.5}{100} S = S + 2 \frac{1.5}{100} S$
- dopo n anni lo stipendio sarà

$$S(n) = S + n \frac{1.5}{100} S = S + nd \quad (d = \frac{1.5}{100} S)$$

- si dice **successione** una corrispondenza che ad ogni intero n associa un valore $S(n)$

$$S(n) = S + n d \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{progressione aritmetica}$$

Successioni 3 - Progressioni Geometriche

ESEMPIO 2: aumento di uno stipendio per effetto degli scatti di anzianità (dalla parte del dipendente)

- $C(0) = C$ stipendio all'istante iniziale, al momento dell'assunzione
- scatto annuale di anzianità pari al 1.5% dello stipendio dell'anno precedente

- dopo un anno $C(1) = C + \frac{1.5}{100} C = C \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)$

- dopo 2 anni

$$C(2) = C(1) + \frac{1.5}{100} C(1) = C(1)\left(1 + \frac{1.5}{100}\right) = C \left(1 + \frac{1.5}{100}\right)^2$$

- posto $q = 1 + \frac{1.5}{100}$, dopo n anni lo stipendio sarà

$$C(n) = C q^n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \text{ progressione geometrica}$$

Modelli di Crescita e Decadimento - 1

CRESCITA CELLULARE

In particolari condizioni, dopo un certo intervallo temporale, una cellula si suddivide in due nuove cellule (*dicotomia della cellula*). Queste a loro volta raddoppiano dopo un intervallo di tempo uguale al precedente.

Assumendo come unità di misura dei tempi il cosiddetto *tempo di raddoppio*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(0) = 1, \quad K(n) = 2 \cdot K(n-1) = 2^n$$

$K(n)$ numero delle cellule dopo n tempi di raddoppio.

ESERCIZIO : Il tempo necessario per una suddivisione di una cellula è di 5 giorni. Calcolare il numero di cellule dopo 60 giorni partendo da un'unica cellula iniziale.

Si osservi che 60 giorni corrispondono a 12 tempi di raddoppio. Il numero delle cellule sarà

$$K(12) = 2^{12} = 4096 \approx 4000$$

nota: può essere utile ricordare che $2^{10} = 1024 \approx 1000$.

Modelli di Crescita e Decadimento - 2

DECADIMENTO RADIOATTIVO

Le sostanze radioattive *decadono* progressivamente. La velocità di decadimento si misura mediante il cosiddetto *semiperiodo* o *tempo di dimezzamento*, che rappresenta il tempo necessario perchè il numero degli atomi della sostanza radioattiva risulti dimezzato.

Assumendo come unità di misura dei tempi il *tempo di dimezzamento*, il processo può essere schematizzato dalla progressione geometrica:

$$K(n) = 0.5 \cdot K(n-1) = (0.5)^n \cdot K(0) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot K(0)$$

$K(n)$ quantità di sostanza radioattiva dopo n tempi di dimezzamento a partire da una quantità iniziale $K(0)$.

ESERCIZIO : Dopo quanti tempi di dimezzamento una sostanza radioattiva si è ridotta a meno di $1/4$ (cioè a meno del 25%) o a meno di $1/1000$ della quantità iniziale ?

$$K(n) = (0.5)^n K(0) \leq 0.25 K(0) \Rightarrow n = 2$$

$$K(n) = (0.5)^n K(0) \leq 0.001 K(0) \Rightarrow n = 10$$

Successioni 5 - Definizione

- una **successione** una corrispondenza (*legge*) che ad ogni naturale n associa un valore $a(n) = a_n$
- è definita da una sequenza **ordinata** di numeri $\{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots\}$
 a_n si dice **termine generale** della **successione** $\{a_n\}$
- ESEMPI (*come si definisce una successione*):

assegnando la legge

$$1. a_n = n^2 \quad \{1, 4, 9, 16, \dots, n^2, \dots\}$$

$$2. a_n = \frac{1}{n} \quad \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

per ricorrenza

$$3. a_n = a_{n-1} q, \quad a_0 = C \Rightarrow a_n = C q^n$$

$$4. a_n = a_{n-1} + d, \quad a_0 = S \Rightarrow a_n = S + nd$$

Successioni 6 - Concetto di Limite

- ESEMPI comportamento di a_n al crescere di n ($n \rightarrow \infty$):

successioni convergenti $a_n \rightarrow a$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a$$

1. $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$, $a_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

2. $\{2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots\}$, $a_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$

successioni divergenti $a_n \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \pm\infty$$

3. $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$; $a_n = n^2 \rightarrow +\infty$

4. $\{-2, -4, -6, -8, \dots\}$; $a_n = -2n \rightarrow -\infty$

successioni indeterminate

non esiste il limite

5. $\{-1, 1, -1, 1, \dots\}$; $a_n = (-1)^n$

6. $\{-1, 4, -9, 16, \dots\}$; $a_n = (-1)^n n^2$