



- **DERIVABILITÀ  $\Rightarrow$  CONTINUITÀ**

se  $f$  è derivabile in  $x_0$  allora risulta continua in  $x_0$ .

Per l'ipotesi di derivabilità  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ , passando al limite nell'uguaglianza

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)$$

si ricava la continuità in  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - f(x_0)) = f'(x_0) \cdot 0 = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

- **CONTINUITÀ  $\nRightarrow$  DERIVABILITÀ**

1.  $y = |x|$  (*punto angoloso*)

2.  $y = \sqrt[3]{x^2}$  (*punto cuspidale*)

tutte queste funzioni risultano continue, ma non derivabili, in  $x = 0$ .

# Criterio di Monotonia 1



- **CRITERIO DI MONOTONIA:**

se  $y = f(x)$  è una funzione continua e derivabile in  $(a, b)$ , si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ debolmente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \iff f \text{ debolmente decrescente in } (a, b)$$

- **NOTA:** per quanto riguarda la *monotonia stretta* si può dimostrare che:

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ strettamente crescente in } (a, b)$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ strettamente decrescente in } (a, b)$$

non valgono le implicazioni inverse, basta considerare  $f(x) = x^3$ , che è strettamente crescente ma  $f'(0) = 0$ .

- **ESEMPI:** determinare gli intervalli in cui le seguenti funzioni risultano crescenti e quelli in cui risultano decrescenti.

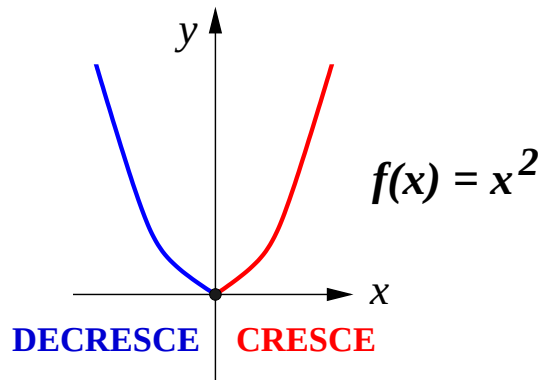
1.  $f(x) = x^2$ . Studiando il segno della derivata:  $f'(x) = 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$

si conclude che:  $f(x)$  è decrescente per  $x < 0$  ed è crescente per  $x > 0$ .

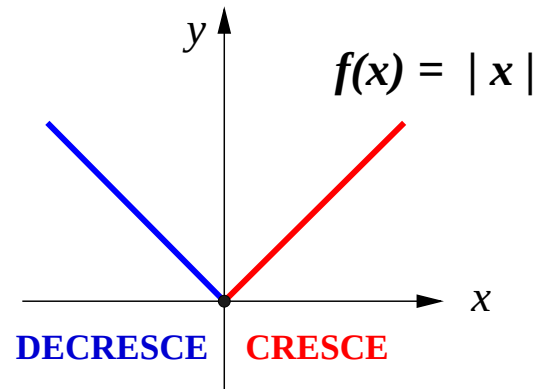
2.  $g(x) = (x^2 - 3)e^x$ . Si ha:  $g'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3 \text{ oppure } x \geq 1$

quindi:  $f(x)$  è decrescente per  $x \in (-3, 1)$  ed è crescente per  $x \notin [-3, 1]$ .

## Criterio di Monotonia 2



- $x < 0$       $f'(x) = 2x < 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  *decescente*
- $x > 0$       $f'(x) = 2x > 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  *crescente*
- $x = 0$       $f'(0) = 0$   
*punto di minimo relativo*

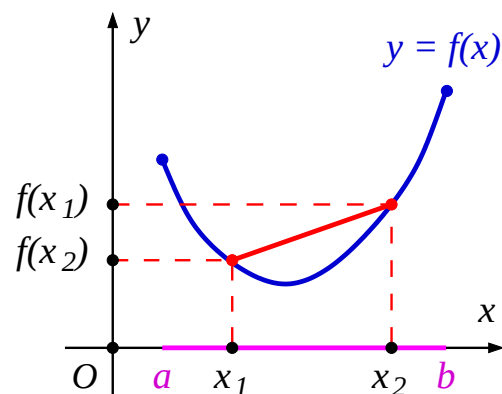


- $x < 0$       $f'(x) = -1 < 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  *decescente*
- $x > 0$       $f'(x) = +1 > 0$   
 $\Rightarrow f(x)$  *crescente*
- $x = 0$       $\nexists f'(0)$   
*punto di minimo relativo*

# Funzioni Concave e Convesse 1



## CONVESSITÀ SU UN INTERVALLO



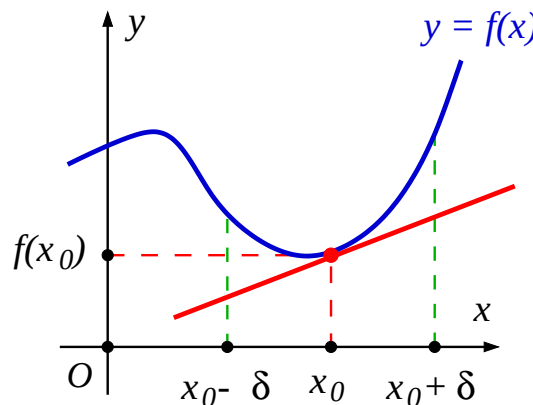
$f$  è convessa in  $(a, b)$  se

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$   
per ogni  $x_1, x_2 \in (a, b)$  e per ogni  $\lambda \in [0, 1]$   
(presi comunque due punti sul grafico di  $f$ , il segmento che li congiunge sta *sopra* il grafico).

$f$  è concava in  $(a, b)$  se

$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$   
per ogni  $x_1, x_2 \in (a, b)$  e per ogni  $\lambda \in [0, 1]$   
(presi comunque due punti sul grafico di  $f$ , il segmento che li congiunge sta *sotto* il grafico).

## CONVESSITÀ IN UN PUNTO



$f$  è convessa in  $x_0$  se esiste  $\delta > 0$  tale che  
 $f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$   
(vicino al punto  $x_0$  il grafico sta tutto *sopra* la retta tangente).

$f$  è concava in  $x_0$  se esiste  $\delta > 0$  tale che  
 $f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$   
(vicino al punto  $x_0$  il grafico sta tutto *sotto* la retta tangente).

# Criterio di Convessità



- **NOTA:** Sia  $y = f(x)$  una funzione derivabile.  
 $f$  è convessa in  $(a, b)$  se e solo se è convessa in ogni punto di  $(a, b)$ .  
 $f$  è concava in  $(a, b)$  se e solo se è concava in ogni punto di  $(a, b)$ .
- **CRITERIO DI CONVESSITÀ:**  
se  $y = f(x)$  è una funzione derivabile due volte in  $(a, b)$ , si ha:  
$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ convessa in } (a, b)$$
$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b) \Rightarrow f \text{ concava in } (a, b).$$
- **ESEMPI:** determinare la convessità delle seguenti funzioni:
  1.  $f(x) = x^2$ . Studiando il segno della derivata seconda:  $f''(x) = 2 \geq 0$ ,  $\forall x$ .  
Si conclude che:  $f(x)$  è convessa per ogni  $x$ .
  2.  $g(x) = e^{-x^2}$ .  
Studiando il segno della derivata seconda:  
$$g''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1) \geq 0 \Rightarrow x \leq -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ oppure } x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
  
si conclude che:  
 $f(x)$  è concava per  $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$  ed è convessa per  $x \notin \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ .

# Problemi di Massimo e Minimo 1



**PUNTI DI MASSIMO E MINIMO ASSOLUTI.** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  :

- $x_0$  si dice *punto di massimo assoluto* se  $f(x_0) \geq f(x)$  , per ogni  $x \in A$
- $x_0$  si dice *punto di minimo assoluto* se  $f(x_0) \leq f(x)$  , per ogni  $x \in A$ .

**TEOREMA DI WEIERSTRASS.** Sia  $f$  una funzione definita e *continua* su un intervallo *chiuso* e *limitato*  $[a, b]$ , allora esistono il massimo ed il minimo assoluti di  $f$  in  $[a, b]$ .

**CONTROESEMPI:** osserviamo che le ipotesi sono tutte essenziali per la validità del teorema:

1.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases}$  per  $x \in [-1, 1]$  e non ha minimo. La funzione non è *continua*.
2.  $f(x) = \frac{1}{x}$  per  $x \in (0, 1]$  non ha massimo. L'intervallo non è *chiuso*.
3.  $f(x) = e^x$  per  $x \in (-\infty, 0]$  non ha minimo. L'intervallo non è *limitato*.

# Problemi di Massimo e Minimo 2



**PUNTI DI MASSIMO E MINIMO LOCALI (RELATIVI).** Sia  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  :

- $x_0$  si dice *punto di massimo locale* se esiste  $\delta > 0$  tale che  
$$f(x) \leq f(x_0) \text{ , per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$$
- $x_0$  si dice *punto di minimo locale* se esiste  $\delta > 0$  tale che  
$$f(x) \geq f(x_0) \text{ , per ogni } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

**TEOREMA DEI PUNTI CRITICI (FERMAT).** Sia  $f$  una funzione definita su un intervallo  $[a, b]$  e sia  $x_0$  un punto di massimo o di minimo locale. Se  $x_0 \in (a, b)$  e se  $f$  è derivabile in  $x_0$ , allora  $f'(x_0) = 0$ .

**PUNTI CRITICI.** I punti  $x_0$  in cui si annulla la derivata prima, tra cui vanno ricercati gli eventuali punti di massimo o di minimo locali interni, si dicono *stazionari* o *critici*.

**CRITERIO DELLA DERIVATA SECONDA.** Sia  $f$  una funzione derivabile due volte nell'intervallo  $(a, b)$  e sia  $x_0$  un *punto critico*:

1. se  $f''(x_0) > 0$  allora  $x_0$  è un punto di minimo locale
2. se  $f''(x_0) < 0$  allora  $x_0$  è un punto di massimo locale.

## Funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato

---

1. Vedere se la funzione è continua e trovare gli eventuali punti di discontinuità;
2. Vedere se la funzione è derivabile e trovare gli eventuali punti in cui non è derivabile;
3. Se la funzione è continua essa ha certamente massimi e minimi (vedi teorema di Weierstrass);
4. I candidati punti di massimo di una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato  $[a, b]$  sono i seguenti:
  - estremi dell'intervallo:  $a, b$ ;
  - valori  $z \in ]a, b[$  in cui la funzione non è derivabile, indichiamo con  $A = \{z : \nexists f'(z)\}$ ;
  - valori  $\bar{x} \in ]a, b[$  in cui la funzione è derivabile e  $f'(\bar{x}) = 0$ , indichiamo con  $B = \{\bar{x} : f'(\bar{x}) = 0\}$



# Funzioni definite su un intervallo chiuso e limitato

---



- Il valore massimo (assoluto) è il massimo di questo insieme:  
 $\{f(a), f(b), f(z), f(\bar{x}) \mid z \in A, \bar{x} \in B\}$
- I punti di massimo sono i valori di  $x$  tali che  $f(x)$  vale il valore massimo.
- Il valore massimo è unico
- I punti di massimo non sono necessariamente unici

# Teoremi dell' Hôpital 1



- **TEOREMA DELL'HÔPITAL:**

Siano  $f, g$  due funzioni derivabili nell'intervallo aperto  $(a, b)$ , escluso al più il punto  $x_0$ , tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Se esiste il limite  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  ( $g'(x) \neq 0$  per  $x \neq x_0$ )

allora esiste anche il limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- **ESTENSIONE:**

il teorema continua a valere, con le dovute modifiche, anche per  $x \rightarrow \pm\infty$  e per le forme indeterminate  $\frac{\infty}{\infty}$ .



- ESEMPI:

$$1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2 \cos 2x} = \frac{1}{2}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log x}{x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{5 x^5} = 0.$$

$$3. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty.$$

- ATTENZIONE:

i teoremi dell'Hôpital servono quando il limite  $f'/g'$  esiste, in caso contrario non sono di alcuna utilità.

*ad esempio :*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + \cos x}{2x + 1} = \frac{3}{2}$  mentre  $\nexists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \sin x}{2}.$

## Il teorema dei due carabinieri

---



Sono date tre funzioni  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  definite in un intorno del punto  $x_0 \in \mathbf{R}$  tali che in un intorno di  $x_0$   $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ , e tali che  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$ , allora si può dimostrare che  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ .

ESEMPIO: vogliamo calcolare  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x}$ . Si ha  $\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$  e poichè  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$  anche  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$