

Studio Qualitativo di Funzione



Reperire un certo numero di informazioni, per descrivere a livello *qualitativo* l'andamento di una funzione $y = f(x)$:

1. campo di esistenza (*insieme di definizione*)
2. segno: *per quali x risulta $f(x) \geq 0$?*
3. intersezioni con gli assi: $(0, f(0))$, *per quali x risulta $f(x) = 0$*
4. comportamento agli estremi del campo di esistenza
5. continuità
6. monotonia
7. massimi e minimi
8. grafico qualitativo

Campo di Esistenza



CAMPO DI ESISTENZA (*insieme di definizione*) è l'insieme di tutti i punti nei quali la funzione è definita.

Nel caso di una funzione *composta* si determina, caso per caso, tenendo conto degli insiemi di definizioni delle *funzioni base* con le quali la funzione è stata costruita.

ESEMPIO

data la funzione
$$y = \frac{1}{\log(4 - x^2)} = f(x)$$

- il logaritmo è definito per

$$4 - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (-2, +2)$$

- il denominatore deve essere diverso da zero

$$\log(4 - x^2) \neq 0 \Rightarrow 4 - x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm\sqrt{3}$$

il campo di esistenza di $y = f(x)$ è l'unione dei tre intervalli

$$(-2, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}), (+\sqrt{3}, +2)$$

$$(-2, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, +\sqrt{3}) \cup (+\sqrt{3}, +2)$$

Comportamento agli Estremi



Se il campo di esistenza D è costituito dall'unione di più intervalli (*limitati o illimitati*) occorre prendere in considerazione separatamente gli estremi di ognuno di questi intervalli.

- se gli estremi appartengono a D , si calcola semplicemente il valore della funzione in tali punti.

ESEMPI

$$f(x) = \sqrt{x}, D = [0, +\infty[, f(0) = \sqrt{0} = 0$$

$$f(x) = \sqrt{x(1-x)}, D = [0, 1], f(0) = \sqrt{0} = 0, f(1) = \sqrt{0}$$

- se gli estremi non appartengono a D si introduce il *concetto di limite*

ESEMPI

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

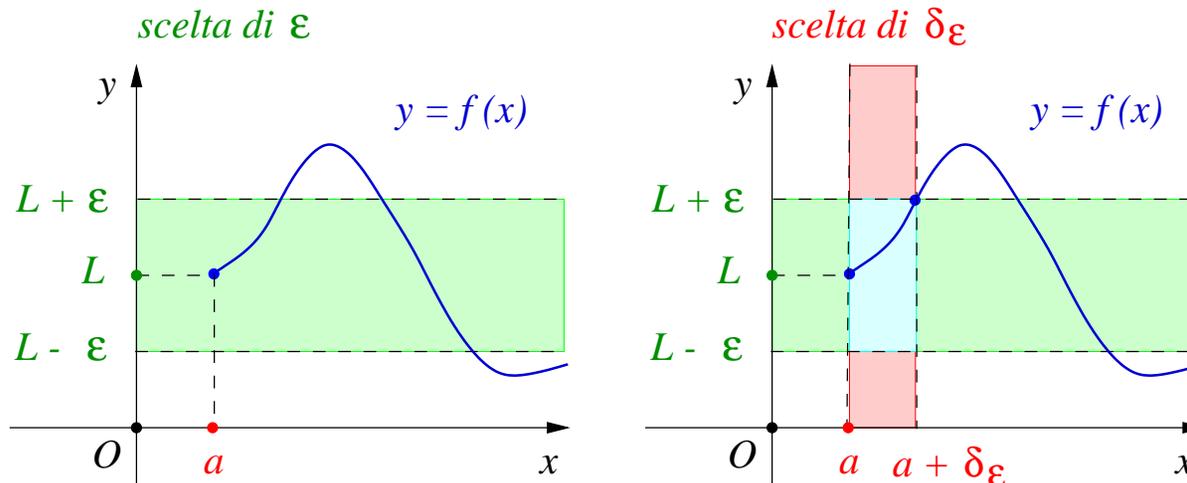
$$\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}^+} \frac{1}{\log(4 - x^2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

Limite Destro $x \rightarrow a^+$



- quando la variabile x assume valori “vicini” ad a (sempre maggiori di a), i corrispondenti valori della $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L .



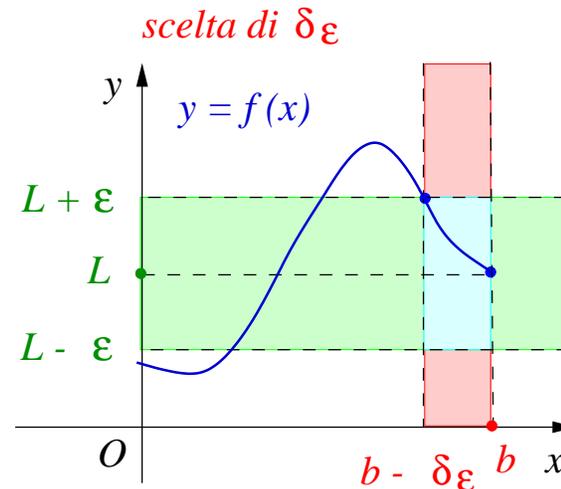
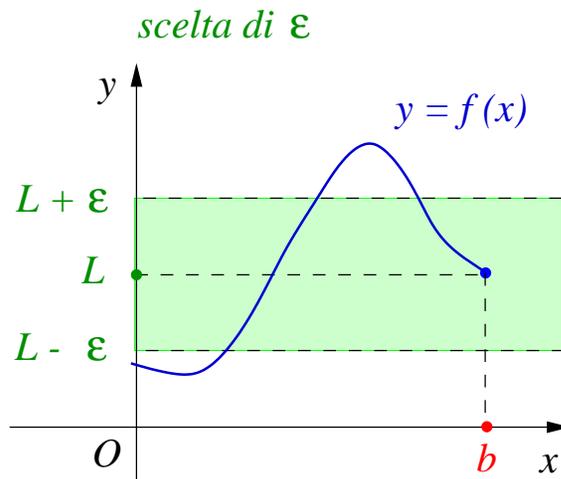
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \quad (\text{limite destro finito})$$

- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad a da destra se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (a, a + \delta_\varepsilon)$.
- ESEMPI:** (1) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x} = +1$.

Limite Sinistro $x \rightarrow b^-$



- quando la variabile x assume valori “vicini” a b (sempre minori di b), i corrispondenti valori della $f(x)$ si avvicinano sempre più al valore L .



$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = L \quad (\text{limite sinistro finito})$$

- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende a b da sinistra se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (b - \delta_\varepsilon, b)$.
- **ESEMPI:** (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} = 0$, (2) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$.

Limiti per $x \rightarrow x_0$



- se la funzione possiede sia il limite destro che il limite sinistro nel punto x_0 e se entrambi sono uguali al valore L si dice che

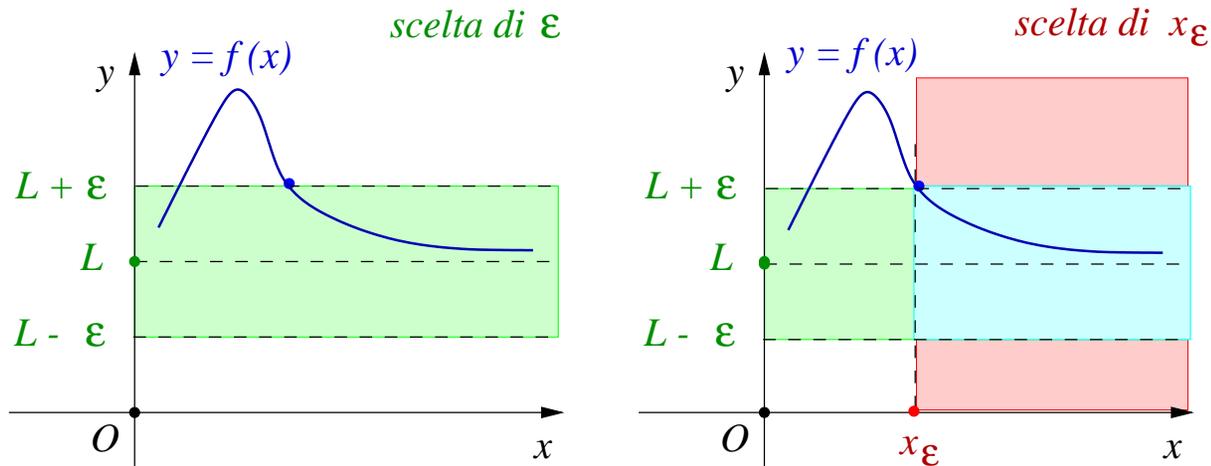
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \quad (\text{limite finito})$$

- quando la variabile x assume valori “vicini” ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori della $f(x)$ sono “vicini” al valore L .
- si dice che $f(x)$ tende al limite L per x che tende ad x_0 se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un $\delta_\varepsilon > 0$ tale che $|f(x) - L| < \varepsilon$ per ogni $x \in (x_0 - \delta_\varepsilon, x_0 + \delta_\varepsilon)$ con $x \neq x_0$.
- **ESEMPI:** (1) $\lim_{x \rightarrow 3} (5x - 9) = 6$, (2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$

Limiti per $x \rightarrow +\infty$



quando la variabile x cresce arbitrariamente, i corrispondenti valori della $f(x)$ sono “vicini” al valore L .



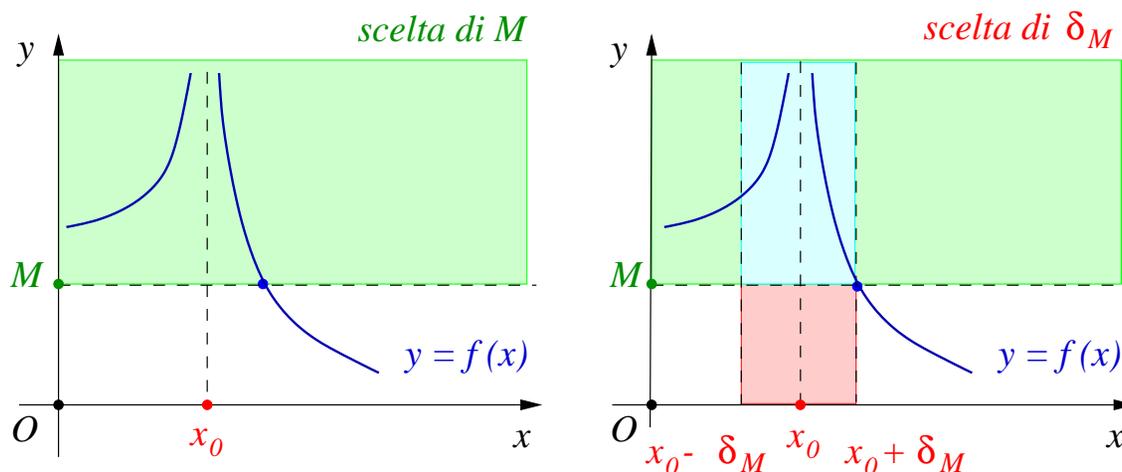
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \quad (\text{limite finito})$$

ESEMPI: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$, (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ [$x_\epsilon = -\log \epsilon$].

Ancora un limite



quando la variabile x assume valori “vicini” ad x_0 (diversi da x_0), i corrispondenti valori della $f(x)$ crescono arbitrariamente.



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

limite infinito

ESEMPI: (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $[\delta_M = \frac{1}{\sqrt{M}}]$.

$$\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$



il limite di una funzione può non esistere:

- $f(x) = \frac{|x|}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.
Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1$
(*limite destro e limite sinistro diversi*).
- $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$. Non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.
Infatti $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$
(*limiti destro e sinistro infiniti di segno opposto*).
- *funzione di Dirichlet*. Non esiste il limite per $x \rightarrow 0$.

Osservazioni - Limiti per $x \rightarrow x_0$



- poichè nella definizione di limite $x \neq x_0$, non ha alcuna importanza l'eventuale valore assunto dalla funzione nel punto x_0

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \neq 0 \\ 1 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad f(0) = 1 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x = 0 \end{cases} \quad f(0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

Ampliamento di \mathbb{R}



Ci chiediamo ora cosa succede alle operazioni aritmetiche sui limiti quando i limiti non sono finiti, in altre parole ci chiediamo se possiamo dare un “significato” ad alcune operazioni in cui compaia l’infinito.

OPERAZIONI: per $\forall c \in \mathbb{R}$ si possono definire le operazioni

1. $+\infty + c = +\infty$, $-\infty + c = -\infty$

(Questo significa che qualunque sia la funzione $f(x)$, che per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$, e qualunque sia la funzione $g(x)$, che per $x \rightarrow x_0$ tende a c , allora $f(x) + g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ tende a $+\infty$ e analogamente per $-\infty$).

2. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$

3. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (-\infty) = +\infty$

4. $\frac{c}{\pm\infty} = 0$

(tutte le operazioni precedenti sono commutative).

5. se inoltre $c \neq 0$

$$(+\infty) \cdot c = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases} \quad (-\infty) \cdot c = \begin{cases} -\infty & \text{se } c > 0 \\ +\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

Forme Indeterminate



FORME INDETERMINATE: restano indeterminate le operazioni

$$+\infty - \infty, \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{0}$$

Cosa significa per esempio che $\frac{0}{0}$ è una forma indeterminata?

Significa che se per $x \rightarrow x_0$ $f(x)$ e $g(x)$ tendono a 0, da questa unica informazione non si può concludere il comportamento di $\frac{f(x)}{g(x)}$ al tendere di x a x_0 .

Esempio : $x_0 = 0$

$f(x) = x$, $g(x) = x^3$, $h(x) = 2x$ si ha che sia $f(x)$ che $g(x)$ per $x \rightarrow x_0$ tendono a 0 $\frac{f(x)}{g(x)}$ tende $+\infty$, $\frac{g(x)}{f(x)}$ tende 0, $\frac{h(x)}{f(x)}$ tende 2,

Operazioni sui Limiti



- Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni risulta rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purchè non sia una delle *forme indeterminate*.

- Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \beta \in \overline{\mathbb{R}}$ allora si ha:

SOMMA: $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) + g(x)] = \alpha + \beta$

PRODOTTO: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = \alpha \cdot \beta$

QUOZIENTE: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\alpha}$

VALORE ASSOLUTO: $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |\alpha|$

- Tale risultato continua a valere anche se
 $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ o $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$.

Limite di Funzione Composta



- **LIMITE DI FUNZIONE COMPOSTA:** siano $y = f(x)$, $z = g(y)$ due funzioni, per cui abbia senso $z = g(f(x))$, tali che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L$$

e $f(x) \neq y_0$ in un intorno di $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$, allora si ha che:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

- **ESEMPI:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{5x+3} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \log(3x+1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(e^{-x})^2} = +\infty.$$

Limiti Fondamentali



- dati i due polinomi, rispettivamente di grado p e q ,

$$P(x) = a_p x^p + a_{p-1} x^{p-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$Q(x) = b_q x^q + b_{q-1} x^{q-1} + \dots + b_1 x + b_0$$

si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{a_p}{b_q} & \text{se } p = q \\ 0 & \text{se } p < q \\ +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \frac{a_p}{b_q} > 0 \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \frac{a_p}{b_q} < 0 \end{cases}$$

- **ESEMPI:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 + 5x + 3}{7x^3 - x^2 + 11} = \frac{4}{7} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + 5x^2 + 3}{x^5 - 3x^4 + 2x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^7} + 10x - 8}{x^2 + 3x + 8} = +\infty.$$

- **ESEMPI:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4} \quad \text{lo risolvo ponendo } t = e^x.$$

Limiti Fondamentali



LIMITE 1:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(x+1)}{x} = 1.$$

LIMITE 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

LIMITE 3:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{se } a = 1 \\ +\infty & \text{se } a > 1. \end{cases}$$

LIMITE 4:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{a^x} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad a > 1$$

LIMITE 5:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^p b^x = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad 0 < b < 1$$

LIMITE 6:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^p x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha > 0.$$

LIMITE 7:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha \log^p x = 0, \quad \forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall \alpha > 0.$$

Funzioni Continue



- **CONTINUITÀ IN UN PUNTO:** la funzione $y = f(x)$ si dice *continua* nel punto x_0 se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

- **CONTINUITÀ IN UN INTERVALLO:** la funzione $y = f(x)$ è *continua* in un intervallo $[a, b]$ se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \forall x_0 \in (a, b), \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b).$$

- **GRAFICAMENTE:** una funzione definita su un intervallo è *continua* se è possibile disegnarne il grafico con un tratto *continuo*, senza staccare la penna dal foglio.

Funzioni Continue - Operazioni



- **SOMMA, PRODOTTO, QUOZIENTE**

Dalle proprietà delle operazioni sui limiti segue che la somma, il prodotto e il quoziente di funzioni continue è una funzione continua.

Dunque se $y = f(x)$, $y = g(x)$ sono continue in x_0 , ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$, si ha:

1. $y = f(x) + g(x)$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = f(x_0) + g(x_0)$.

2. $y = f(x)g(x)$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$.

3. $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ è continua in x_0 ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}$,
(i denominatori devono essere diversi da zero).

- **FUNZIONE INVERSA**

Se f è continua ed invertibile allora anche la *funzione inversa* f^{-1} risulta continua.

Funzioni Continue - Esempi



risultano *continue* nei rispettivi *campi di esistenza*:

1. le funzioni potenza ad esponente reale $y = x^b$
2. i polinomi $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$
3. le funzioni razionali (*quozienti di due polinomi*)
4. le funzioni esponenziali $y = a^x$ e le loro inverse (le funzioni logaritmiche $y = \log_a x$)
5. le funzioni $\sin x$, $\cos x$, $\tan x, \dots$ e le loro inverse
6. ...

Continuità della Funzione Composta



- **FUNZIONE COMPOSTA:**

supponiamo che:

– $y = g(x)$ continua in x_0 , ovvero $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$

– $y = f(x)$ continua in $y_0 = g(x_0)$, ovvero $\lim_{y \rightarrow y_0} f(y) = f(y_0)$

allora $f \circ g$ è continua in x_0 , ovvero

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

- **ESEMPI :**

$y = \sqrt[3]{7 + e^x}$, $y = \log_{10}(9 + e^{1-x})$ sono continue ove sono definite

Limite di Funzioni Composte



Cosa si può dire del *limite della funzione composta* e della *continuità della funzione composta* ?

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{7 + e^x} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1} \log_{10}(9 + e^{1-x}) = 1$

2. usando la continuità della funzione $y = \sqrt{x}$ posso dire:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x}} = 2$$

3. dovendo calcolare il limite:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x} + 5e^x}{2e^{3x} - e^{2x} + 4}$$

faccio il seguente cambio di variabile: $t = e^x$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} t = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ e mi riconduco al calcolo del limite:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^3 + 5t}{2t^3 - t^2 + 4}$$

Esempi di Discontinuità



ESEMPIO 1: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \quad f(0) = 1.$$

ESEMPIO 2: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$y = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0 \\ +1 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +1.$$

ESEMPIO 3: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

$$y = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1.$$

ESEMPIO 4: $\lim_{x \rightarrow 0} = +\infty$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

ESEMPIO 5: $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty$

$$y = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$