

Funzione Composta



Date due funzioni $g : A \rightarrow B$ e $f : B \rightarrow C$ si può definire la **funzione composta**:

$$f \circ g : A \rightarrow C \quad x \mapsto g(x) \mapsto f(g(x))$$

notazione funzionale $y = f(g(x))$

La composizione ha senso se il valore $g(x)$ appartiene al dominio della funzione f .

Il dominio della funzione composta è costituito dai soli valori di x per i quali la composizione funzionale ha senso.

ESEMPI:

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2 - 4 \Rightarrow f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 4}$, $D = \{x \leq -2 \text{ o } x \geq 2\}$
2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x - 7 \Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{x - 7}$, $D = \{x \neq 7\}$
3. $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2 + 1 \Rightarrow f(g(x)) = \frac{1}{x^2 + 1}$, $D = \mathbb{R}$

Funzione Composta



1. Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = 2x + 1$

- Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione;
- Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

Soluzione $f(g(x)) = e^{2x+1}$, $g(f(x)) = 2e^x + 1$

2. Date le funzioni $f(x) = x^2$ e $g(x) = x + 1$

- Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione;
- Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

Soluzione: $f(g(x)) = (x + 1)^2$, $g(f(x)) = x^2 + 1$

Funzione Inversa 1



- una funzione **BIUNIVOCA** si dice **INVERTIBILE**
- se $f : A \rightarrow B$ è **invertibile** si definisce la **funzione inversa** f^{-1} come segue:

$$f^{-1} : B \rightarrow A \quad , \quad x = f^{-1}(y)$$

$$\forall y \in B \rightarrow x \in A \text{ tale che } f(x) = y$$

un tale x esiste ed è unico perchè la funzione f è biiunivoca.

- **ESEMPI:**

1. $y = f(x) = 2x + 1$; $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x = f^{-1}(y) = \frac{1}{2}(y - 1) ; \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

2. $y = f(x) = x^2$; $f : (-\infty, 0] \rightarrow [0, +\infty)$

$$x = f^{-1}(y) = -\sqrt{y} ; \quad f^{-1} : [0, +\infty) \rightarrow (-\infty, 0]$$

Funzione Inversa 2



- **PROPRIETÀ:**

sia $f : A \rightarrow B$ invertibile e sia $f^{-1} : B \rightarrow A$ la sua funzione inversa.

considero la funzione composta $f^{-1} \circ f$

($y = f^{-1}(f(x))$) *con notazione funzionale*

$$f^{-1} \circ f : x \in A \rightarrow f(x) = y \in B \rightarrow f^{-1}(y) = x \in A$$

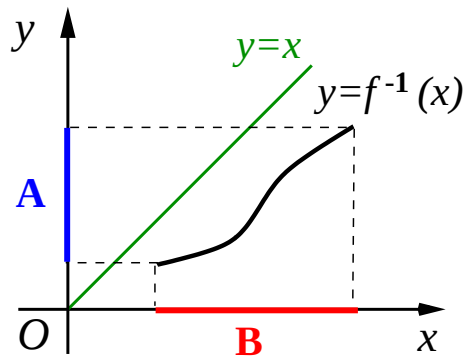
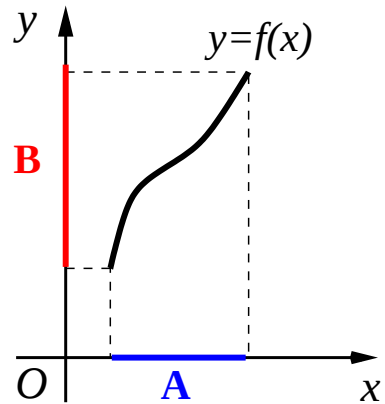
$$f^{-1} \circ f : A \rightarrow A, \quad x \rightarrow x \quad \text{funzione identità.}$$

la stessa cosa vale per $f \circ f^{-1}$

$$f \circ f^{-1} : y \in B \rightarrow f^{-1}(y) = x \in A \rightarrow f(x) = y \in B$$

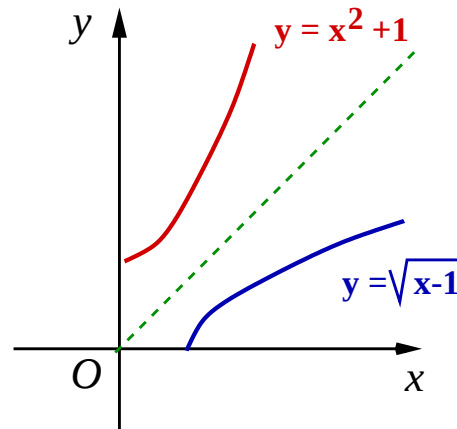
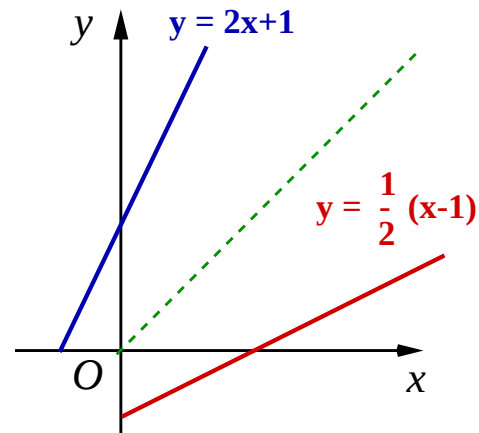
$$f \circ f^{-1} : B \rightarrow B, \quad y \rightarrow y \quad \text{funzione identità.}$$

Funzione Inversa 3



il grafico di $y = f^{-1}(x)$
si ottiene per simmetria
rispetto a $y = x$.

ESEMPI:



Criterio di Invertibilità



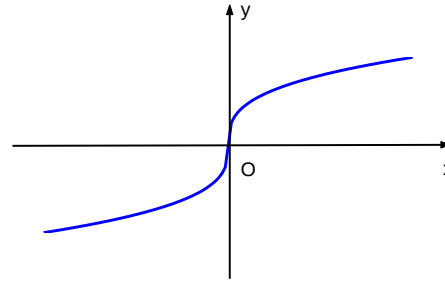
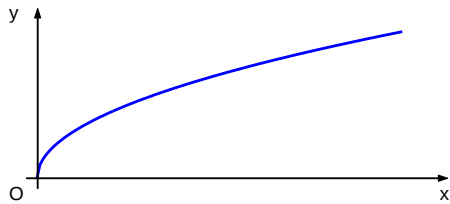
- le funzioni strettamente monotone sono iniettive
- **CRITERIO DI INVERTIBILITÀ** se f è strettamente monotona e suriettiva allora f è invertibile
- se $f : A \rightarrow B$ è invertibile allora:
 - f crescente $\Leftrightarrow f^{-1}$ crescente
 - f decrescente $\Leftrightarrow f^{-1}$ decrescente

Radici



INVERTIBILITÀ DELLA POTENZA: consideriamo il problema dell'invertibilità della funzione potenza $y = x^n$ con $n \in \mathbb{N} - \{0\}$

- se $n = 0$ la funzione $y = x^0 = 1$ è costante dunque *non invertibile*.
- se $n = 1$ la funzione $y = x$ è l'*identità*, con inversa uguale a se stessa.



- se $n = 2$ $y = x^2$ è *invertibile* in $\mathbb{R}_+$
- $y = \sqrt{x} \quad \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ è detta *radice quadrata*.
- se $n = 3$ $y = x^3$ è *invertibile* su tutto $\mathbb{R}$
- $y = \sqrt[3]{x} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è detta *radice cubica*.

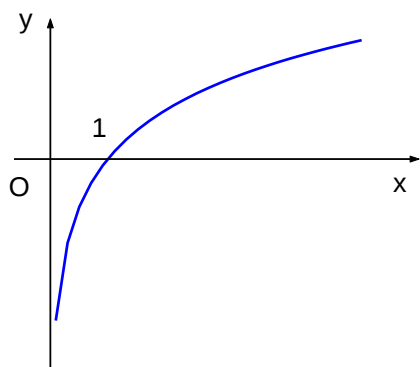
In generale se n è *pari* si ragiona come per $n = 2$ e la funzione $y = x^n$ risulta invertibile su $\mathbb{R}_+$ $y = \sqrt[n]{x} \quad \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ *radice n-sima*

Viceversa se n è *dispari* si ragiona come per $n = 3$ e la funzione $y = x^n$ risulta invertibile su tutto $\mathbb{R}$. $y = \sqrt[n]{x} \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *radice n-sima*

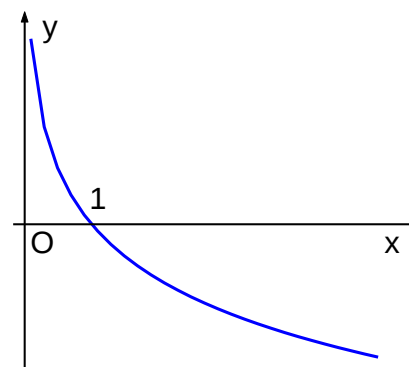
Funzione Logaritmo



- $y = a^x \quad \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad \text{strettamente monotona} \Rightarrow \text{invertibile}$
- $f^{-1} : y \in \mathbb{R}_+ \mapsto x \in \mathbb{R} / a^x = y ; \quad x = f^{-1}(y) = \log_a y \quad (\text{logaritmo in base } a \text{ di } y)$



$y = \log_a x \quad \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } a > 1$



$y = \log_a x \quad \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{per } 0 < a < 1$

POPRIETÀ DEI LOGARITMI:

- $\log_a(x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$
- $\log_a(x^b) = b \log_a x$
- $\log_a \left(\frac{x_1}{x_2} \right) = \log_a x_1 - \log_a x_2$
- $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \quad (\text{cambio di base})$

Esercizi Funzione Composta 1



ESERCIZIO - [(A)] Date le funzioni $f(x) = e^x$ e $g(x) = \log_e(x - 2)$

1. Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.
2. Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

SOLUZIONE :

1. La funzione composta è $f(g(x)) = e^{\log_e(x-2)} = x-2$. L'insieme di definizione è $x > 2$, poichè $g(x)$ è definita per $x > 2$.
2. La funzione composta è $g(f(x)) = \log_e(e^x - 2)$. L'insieme di definizione si ottiene ponendo: $e^x - 2 > 0$ da cui segue $x > \log_e 2$.

Esercizi Funzione Composta 2



ESERCIZIO 2 - Date le funzioni $f(x) = -x^3$ e $g(x) = \log_e x$

1. Dire quanto vale $f(g(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.
2. Dire quanto vale $g(f(x))$ e quale è il suo insieme di definizione.

SOLUZIONE :

1. La funzione composta è $f(g(x)) = -(\log_e x)^3$.
L'insieme di definizione è $x > 0$, poichè $g(x)$ è definita per $x > 0$.
2. La funzione composta è $g(f(x)) = \log_e (-x^3)$.
L'insieme di definizione è $-x^3 > 0$ da cui segue $x < 0$.

Funzione Inversa



1. Data la funzione $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ così definita: $f(x) = -x + 3$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = 3 - y$
cioè $f^{-1}(x) = 3 - x$

2. Data la funzione $f(x) = x^3 + 2$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

Soluzione: la funzione è biunivoca e l'inversa è $f^{-1}(y) = (y - 2)^{\frac{1}{3}}$
cioè $f^{-1}(x) = (x - 2)^{\frac{1}{3}}$

3. Data la funzione $f(x) = x^2 + 2x + 1$ dire se è invertibile e trovare la formula dell'inversa;

Soluzione: la funzione non è invertibile in quanto non è né iniettiva né suriettiva. per renderla suriettiva basta pensarla a valori in $\mathbf{R}^+$ e per renderla iniettiva basta per esempio restringerla a $[-1, +\infty)$,

dunque la funzione $\mathbf{R}^+ \longrightarrow [-1, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2 + 2x + 1$ è invertibile e la sua inversa è $f^{-1}(y) = \sqrt{y} - 1$.