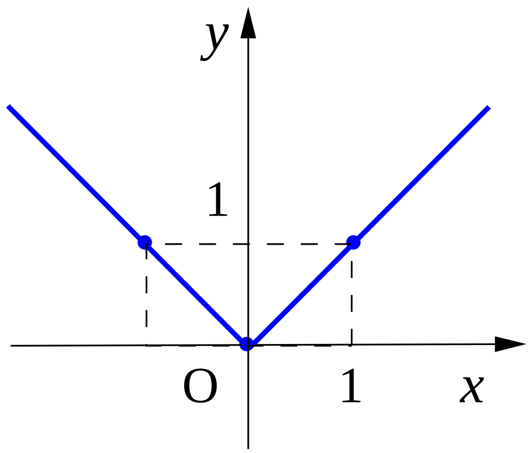
Funzione Valore Assoluto



$$y = |x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$$

$A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}_+$

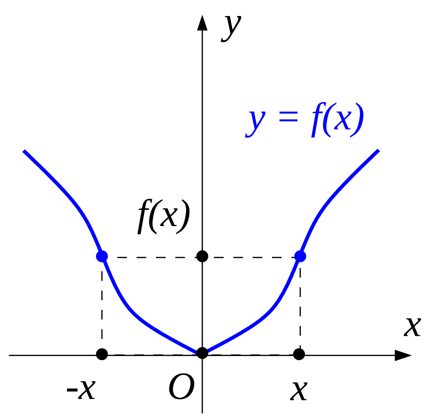
PROPRIETÀ:

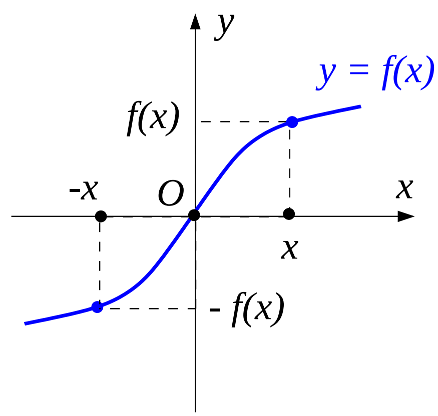
- $|x| \geq 0 \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $|x| = 0$ *se e solo se* $x = 0$
- $|x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\left|\dfrac{x_1}{x_2}\right| = \dfrac{|x_1|}{|x_2|}$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$
- $\sqrt{x^2} = |x|$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$
- se $r > 0$, $|x| \leq r$ *se e solo se* $-r \leq x \leq r$
  $|\, x - x_0 \,| \leq \delta \Leftrightarrow x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$
- *disuguaglianza triangolare*
  $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, $\forall\ x_1, x_2 \in \mathbb{R}$

Funzioni Pari e Dispari

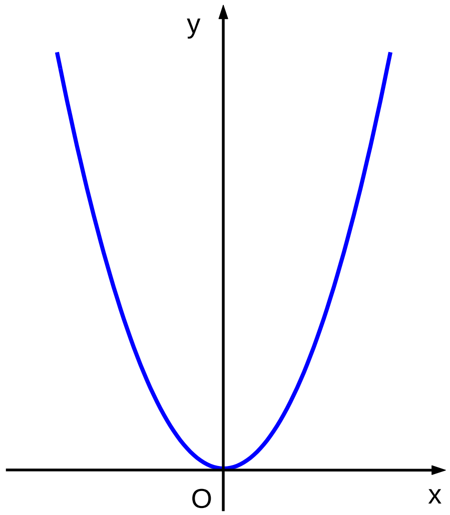
una funzione $f:\ \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

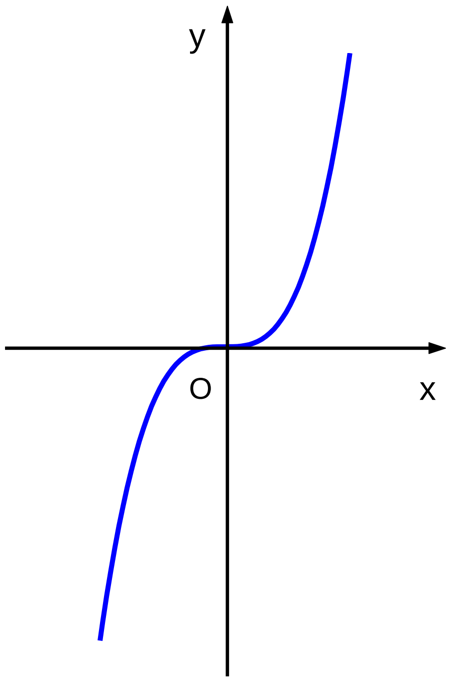
- PARI: $\quad se\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad f(-x) = f(x)$
  il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'asse y
- DISPARI: $se\ \ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\quad f(-x) = -f(x)$
  il grafico della funzione è simmetrico rispetto all'origine O
- ESEMPI:
  $y = x^2\ ,\quad y = x^{2n}\ ,\qquad y = |x|\ ,\quad funzioni\ pari$
  $y = x\quad ,\quad y = x^{2n+1}\ ,\quad y = \dfrac{1}{x}\ ,\qquad funzioni\ dispari$





Potenze ad esponente intero





$y = x^2 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad \textit{funzione pari}$ $\qquad$ $y = x^3 \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad \textit{funzione dispari}$

- il grafico di x^n è qualitativamente simile a quello di x^2 se n è *pari* o a quello di x^3 se n è *dispari*.

Ancora Potenze 1

- POLINOMI: con operazioni di somma e prodotto si costruiscono *polinomi*, cioè le funzioni del tipo:

$$x \mapsto P_n(x) = a_0 + a_1\ x + a_2\ x^2 \cdots a_{n-1}\ x^{n-1} + a_n\ x^n \quad \textit{polinomio di grado } n.$$

- FUNZIONI RAZIONALI: facendo il quoziente di due polinomi $P(x)$ e $Q(x)$ si ottengono le *funzioni razionali* del tipo:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad definita\ su \quad \{x \in \mathbb{R}\ /\ Q(x) \neq 0\}.$$

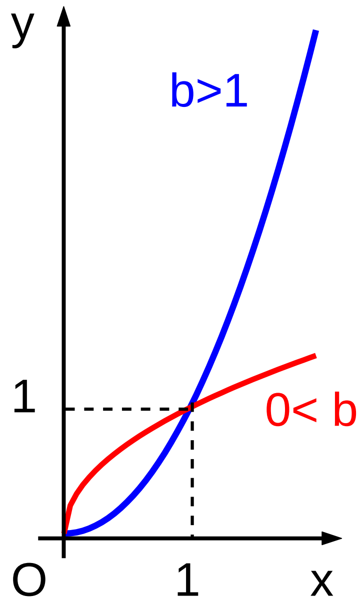
- CASO PARTICOLARE: come caso particolare abbiamo le funzioni potenza con *esponente intero*: $\quad y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n} \quad definita\ su \quad \mathbb{R} - \{0\}.$

- POTENZE AD ESPONENTE RAZIONALE: per $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$, $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ e $x > 0$ si definisce la *potenza ad esponente razionale* come segue:
$y = x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$

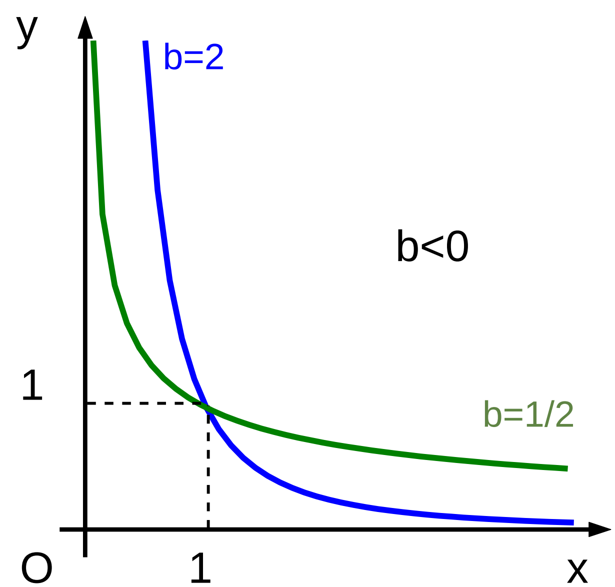
- POTENZE AD ESPONENTE REALE: per *estensione* si può definire la *potenza ad esponente reale*:

$$y = x^\alpha \quad per\ ogni \quad x > 0 \quad e \quad \alpha \in \mathbb{R} \qquad resta\ indefinito \quad 0^0 \quad !!!.$$

Ancora Potenze 2



$y = x^b \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad per \quad b > 0$



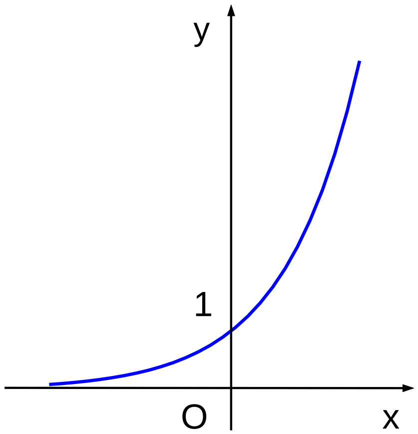
$y = x^b \quad \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \quad per \quad b < 0$

PRODOTTO DI POTENZE DI ESPONENTE b :

se $x, y, b \in \mathbb{R}$ con $x > 0$ e $y > 0$, valgono le seguenti regole:

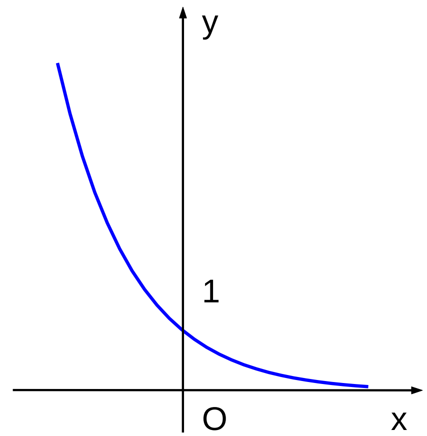
$$x^b y^b = (xy)^b \quad , \qquad \frac{x^b}{y^b} = \left(\frac{x}{y}\right)^b .$$

Funzione Esponenziale



$y = a^x \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad con \quad a > 1$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ *strettamente crescente*
- se x tende a $+\infty$ a^x tende a $+\infty$
- se x tende a $-\infty$ a^x tende a 0



$y = a^x \quad \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \quad con \quad 0 < a < 1$

- $a^0 = 1$, $a^1 = a$
- $a^x > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$
- $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2}$ *strettamente decrescente*
- se x tende a $+\infty$ a^x tende a 0
- se x tende a $-\infty$ a^x tende a $+\infty$

POPRIETÀ DELL'ESPONENZIALE:

$$a^x a^y = a^{x+y} \quad (prodotto) \;, \quad (a^x)^y = a^{xy} \quad (composizione) \;, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x} \quad (reciproco).$$