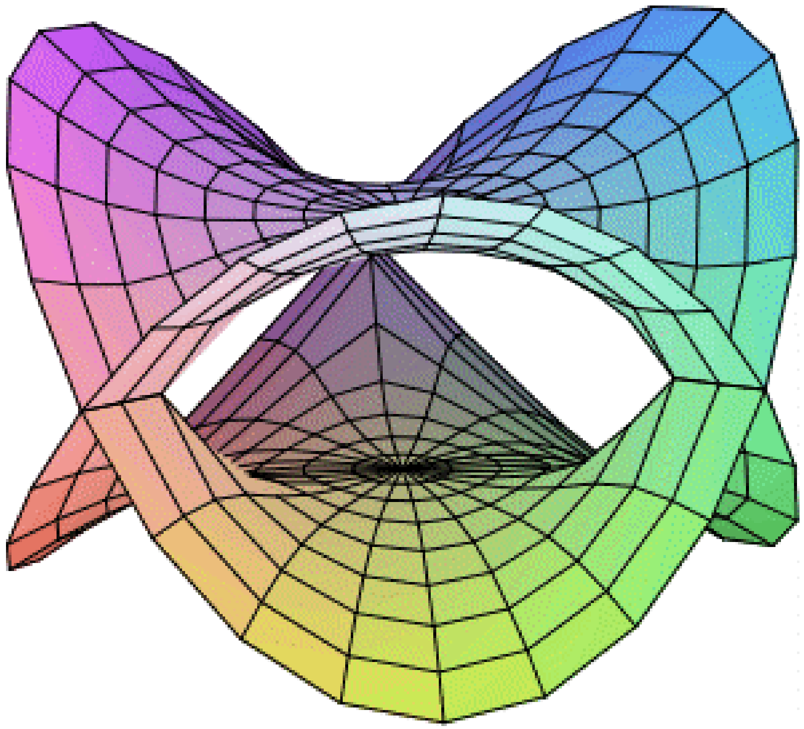
Maurizio Cornalba

La Forma dello Spazio

Collegio Ghislieri, 15 maggio 2000



1. L'algebrizzazione della geometria

la geometria analitica (sec. XVII – ...) dà

(1) metodo generale (insieme al calcolo infinitesimale) per porre e trovare le risposte a problemi di geometria generali, e non riferiti a figure particolari e di cui si è già divinata la risposta come accade per la formulazione euclidea assiomatica.

(2) identificando punti del piano o dello spazio a coppie o terne di numeri, un suggerimento (per il momento non colto) per una geometria in dimensione maggiore di 3.

2. Le carte geografiche, la geodesia e Gauss

I problemi:

(1) rappresentare "fedelmente" porzioni di superficie terrestre sul piano (impossibile se preso in senso letterale)
(2) descrivere la forma della terra con misurazioni effettuate sulla superficie (niente satelliti artificiali!)

Le scoperte:

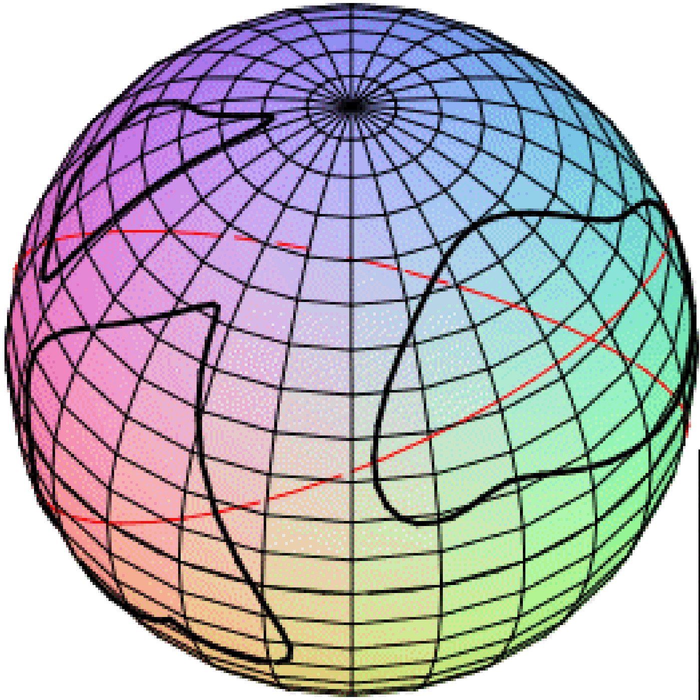
(1) gli inizi di geometrie non metriche (conformi, di area, . . .). La struttura metrica appare come sovrapposta, o aggiunta, a una struttura geometrica più semplice che le soggiace.

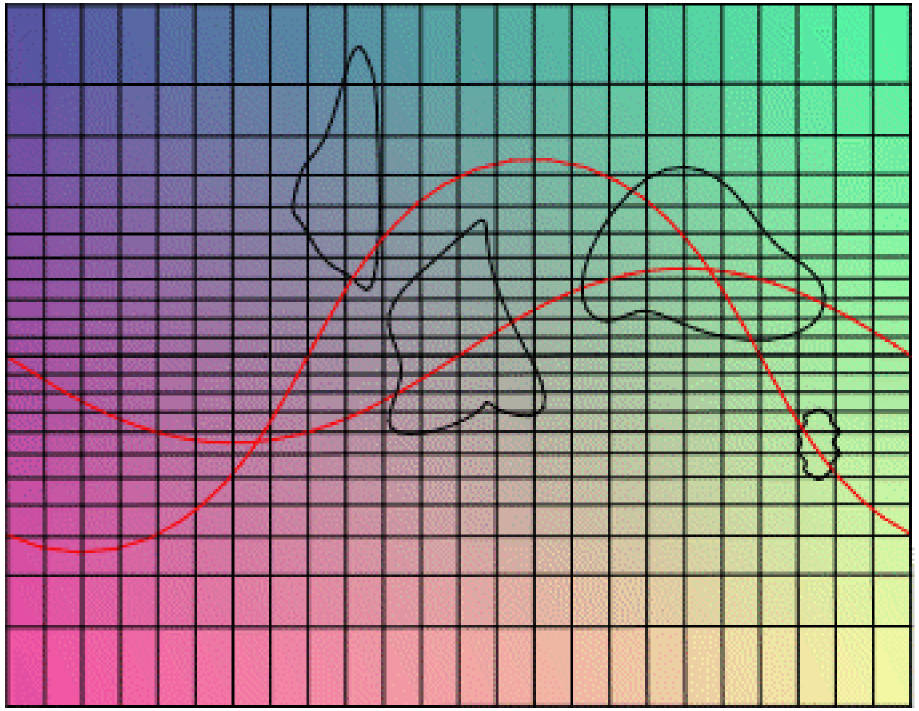
(2) la curvatura K delle superficie come invariante intrinseco, cioè calcolabile, in linea di principio, da un essere bidimensionale che viva sulla superficie (Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827).

(3) il teorema di Gauss-Bonnet:
per un triangolo geodetico la somma degli angoli interni vale

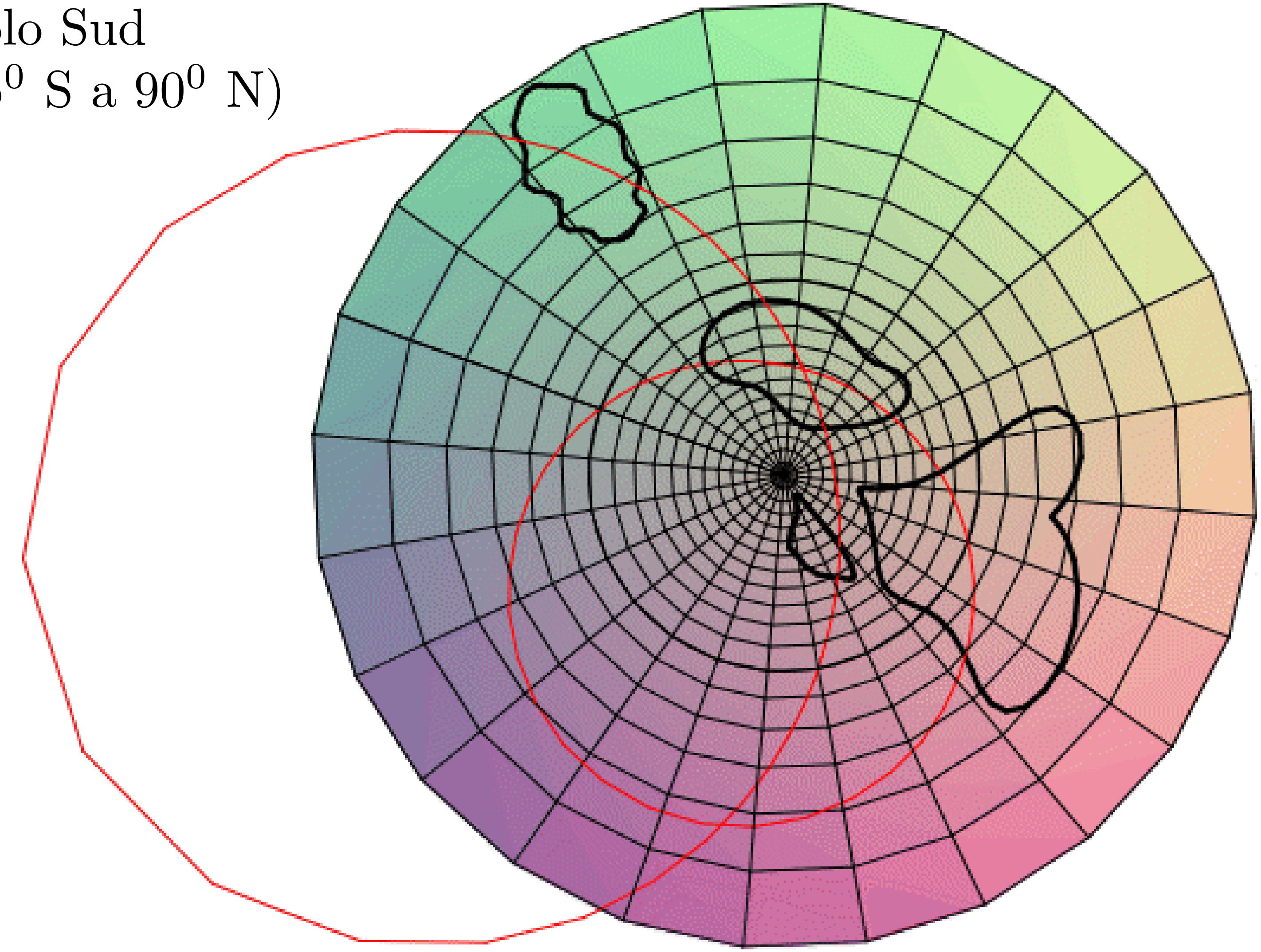
$$\pi + \int_{\text{triangolo}} K dv$$

Proiezione cilindrica di Mercatore





Proiezione stereografica
dal polo Sud
(da 45^0 S a 90^0 N)



3. Riemann

La geometria Riemanniana (1854):

coordinate $x_1, x_2, \ldots, x_n$, metrica $\sum g_{ij} dx_i dx_j$ (g_{ij} positiva definita)

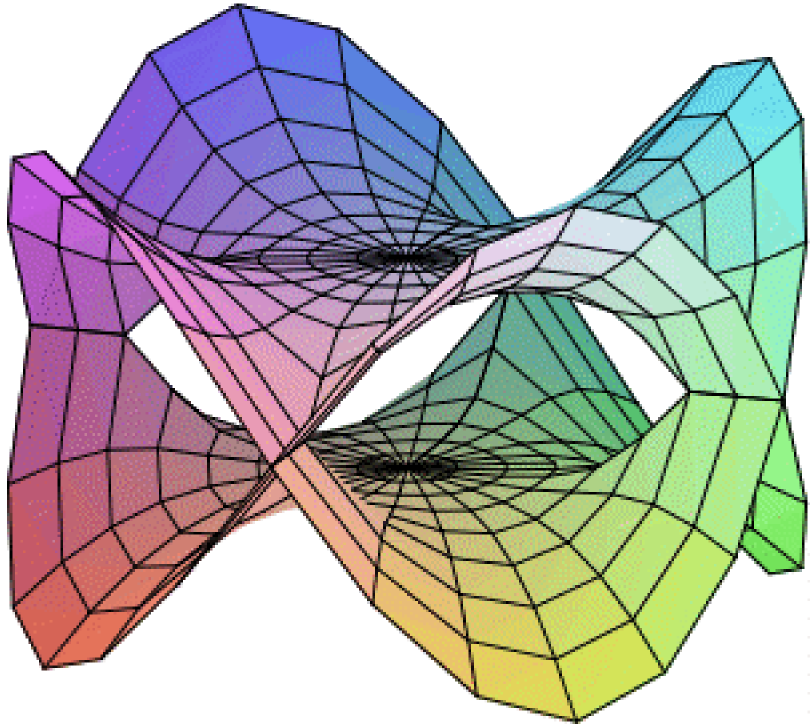
(1) è uno spazio "in sè", che non eredita la sua geometria da uno spazio ambiente in cui sia immerso
(2) multidimensionale
(3) euclideo a piccola scala, ma non necessariamente a grande scala
(4) generalizza la teoria intrinseca delle superficie di Gauss (curvatura Gaussiana $\mapsto$ tensore di Riemann (introdotto nel 1861))

Le superficie di Riemann (delle funzioni algebriche):

soluzioni di $F(z, w) = 0$, dove F è un polinomio nelle variabili complesse z, w, di grado > 0 in w

una “geometria” nuova, non metrica ma conforme (c’è una nozione intrinseca di angolo)

Grafico della parte reale di $\sqrt{(1 - z^4)/6}$ per $|z| < 3/2$



M. Cornalba, La Forma dello Spazio

4. La “reazione” sintetica

Nel secolo XIX si assiste a una rinascita del punto di vista sintetico in geometria, la cui influenza permane forte fino ai primi anni del XX secolo. Tra il 1815 e il 1850 Poncelet, Chasles, Steiner, von Staudt e altri sviluppano il punto di vista sintetico in geometria proiettiva, svincolando questa dalle nozioni metriche e in particolare rendendola indipendente dalla geometria euclidea.

Inizio della realizzazione della possibilità di vari tipi di geometria, a seconda delle caratteristiche degli oggetti che si vogliono considerare e di quelle che si vogliono ignorare.

5. Dall'estrinseco all'intrinseco

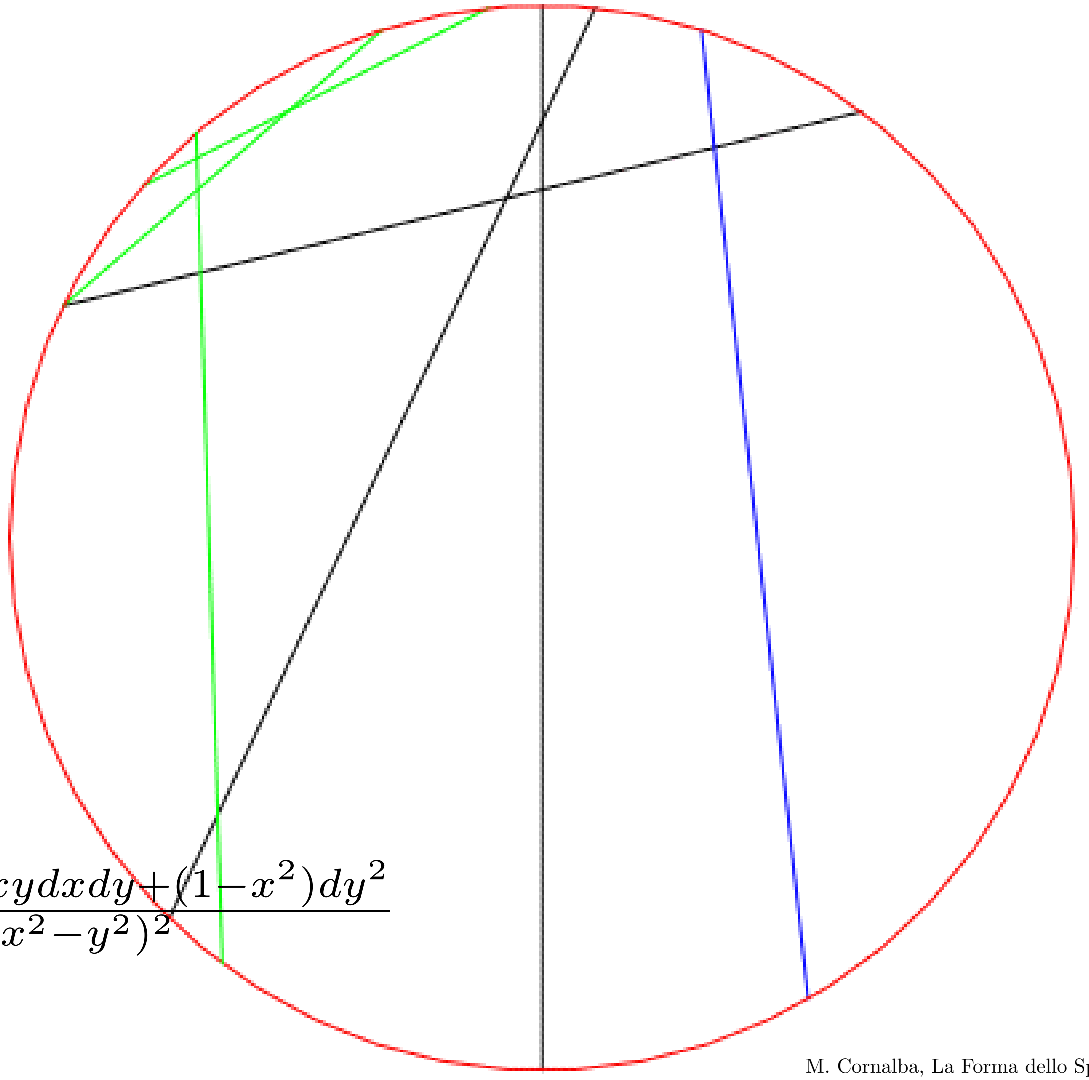
A partire da Riemann, e in particolare nel XX secolo, la geometria è soprattutto intrinseca.

Geometria estrinseca: studio di figure e configurazioni in uno spazio ambiente di riferimento (tradizionalmente euclideo)

Geometria intrinseca: studio "in sè" e "da dentro", nonché classificazione, dei vari spazi possibili

Una spinta decisiva all'accettazione del punto di vista intrinseco in geometria è venuta dalla teoria della relatività generale, alla quale soggiace uno spazio quadridimensionale "Riemanniano" ma con metrica indefinita di segnatura $(3, 1)$.

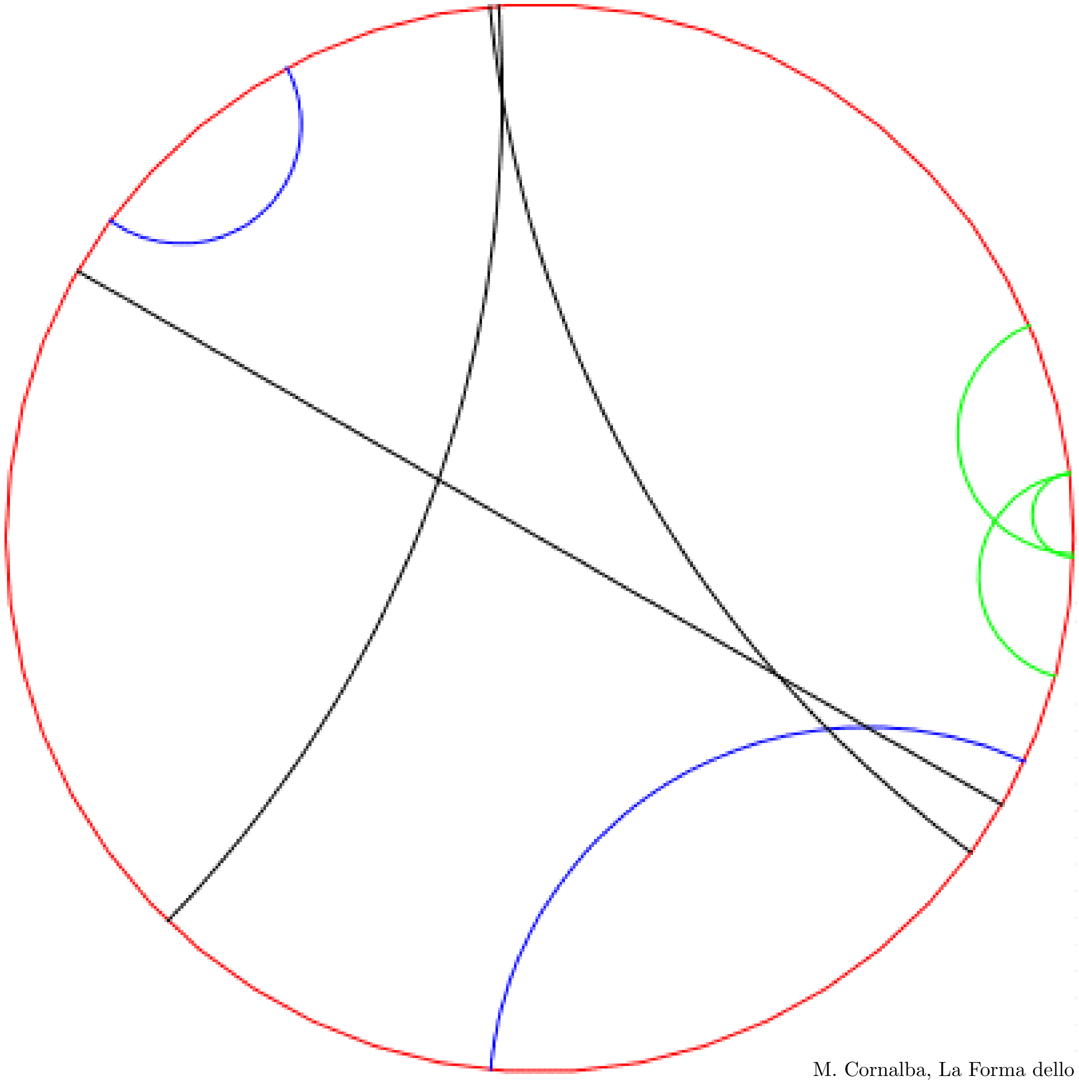
Geodetiche nel piano iperbolico nella rappresentazione di Beltrami



$K = -1$

$$ds^2 = \frac{(1-y^2)dx^2 + 2xydxdy + (1-x^2)dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$$

Geodetiche nel piano iperbolico nella rappresentazione di Poincaré



$K = -1$

$ds^2 = 4\frac{dx^2+dy^2}{(1-x^2-y^2)^2}$

M. Cornalba, La Forma dello Spazio

Un oggetto si allontana a velocità costante dall'osservatore

nello spazio iperbolico | nello spazio euclideo

Altre “ bizzarrie” della geometria non euclidea:

- Non è possibile fare ingrandimenti fedeli di oggetti estesi non unidimensionali; la forma di un oggetto ne determina la scala
- Se la curvatura non è costante è impossibile il moto dei corpi rigidi

Entrambe sono conseguenze di Gauss-Bonnet

6. Dal locale al globale

Il modo moderno di descrivere uno "spazio":

- Dati locali: "carte geografiche" di parti dello spazio
- Dati di incollamento: come combinare le carte per ricostruire il tutto

I dati locali sono tipicamente (ma non sempre) aperti di $\mathbb{R}^n$ con qualche tipo di "struttura" aggiuntiva. I dati di incollamento sono tipicamente identificazioni tra parti di carte diverse che "rispettano" la struttura.

Tipo di struttura e identificazioni scelte $\mapsto$ tipo di geometria

La metafora geometrica è usata per modellare fenomeni non necessariamente legati alla nostra intuizione spaziale. La natura di questi determina il tipo di geometria.

Un bestiario di tipi di geometria

- Differenziale – identificazioni: funzioni differenziabili
- Riemanniana – geometria differenziale + metrica Riemanniana
- Simplettica – geometria differenziale + 2-forma chiusa non degenere
- Algebrica – dati locali: luoghi di zeri di polinomi in più variabili; identificazioni: funzioni razionali
- ...

La struttura locale è in genere relativamente semplice, a volte banale (geometria differenziale, geometria simplettica), ma a volte potenzialmente molto complicata (geometria algebrica, specie in presenza di singolarità)

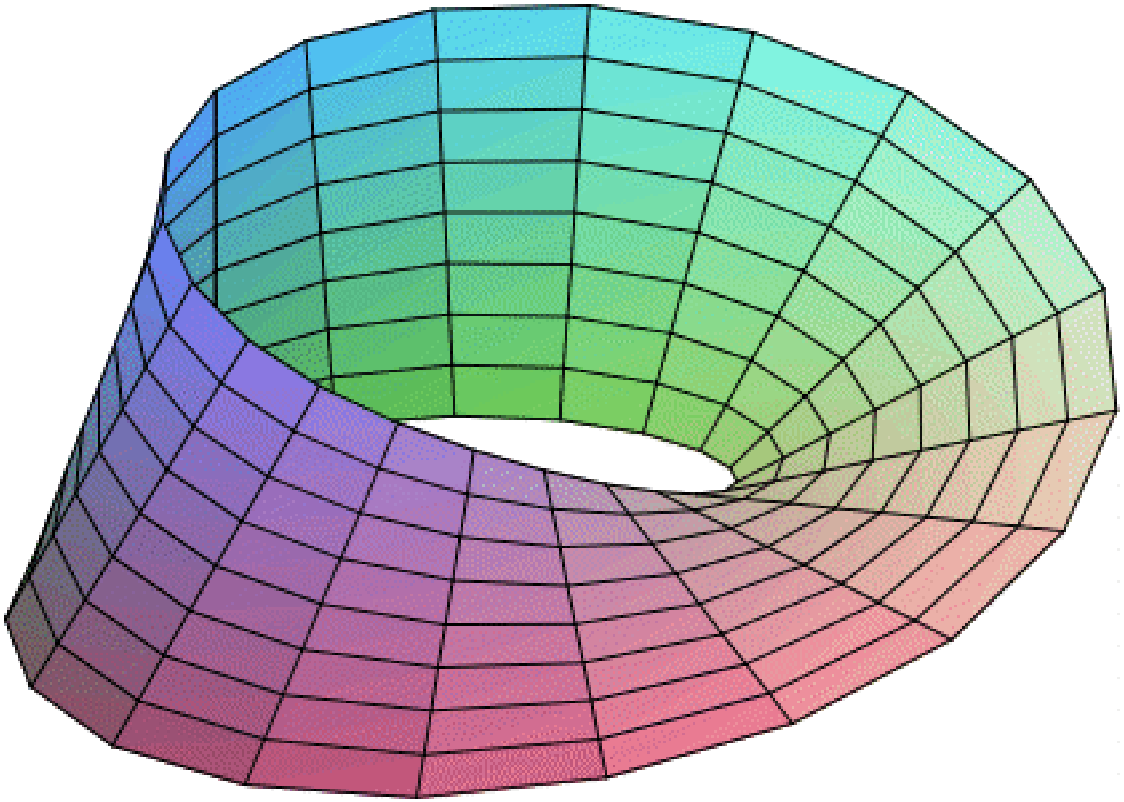
Studio locale: analisi, algebra

Studio globale: prevalentemente metodi topologici
I metodi coomologici studiano la possibilità di combinare soluzioni locali di un problema per ottenere soluzioni globali.

XX secolo: il secolo della topologia

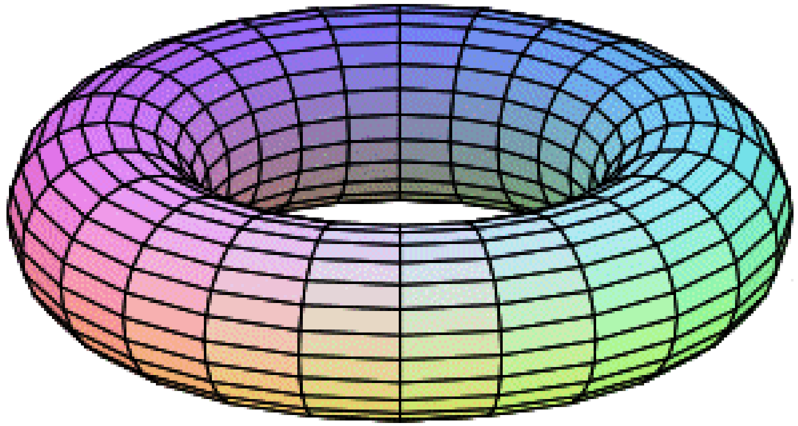
La struttura locale non determina la struttura globale
(ma spesso la limita; esempio: la presenza di una metrica con segnatura $(3,1)$ implica che lo spazio-tempo della relatività generale deve avere caratteristica di Eulero-Poincaré nulla)

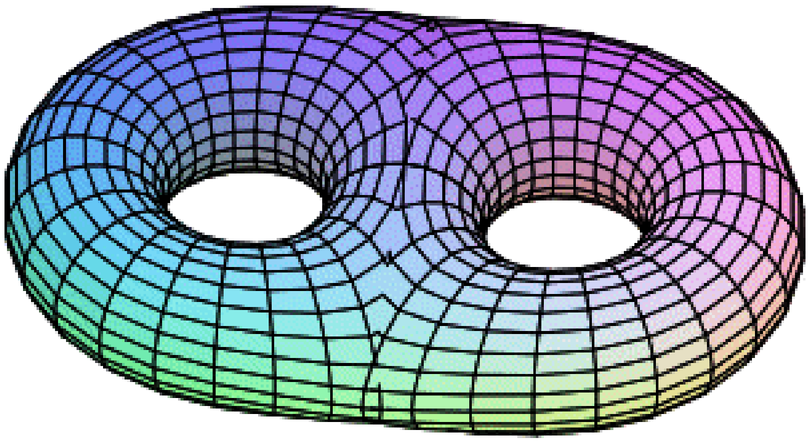
L'esempio più banale: un nastro di Möbius è localmente come il piano euclideo (si può fare in modo che lo sia anche dal punto di vista metrico).



Altri esempi:

sul toro si può porre
una metrica piatta





Sulle superficie
di genere > 1
si può porre
una metrica
di curvatura -1

Localmente il toro e le superficie di genere > 1 sono indistinguibili dal piano euclideo e dal piano iperbolico.

7. La geometrizzazione dell'algebra e dell'aritmetica

Un antecedente: la teoria di Gel'fand per le algebre di Banach

X spazio topologico compatto decente, $\mathrm{C}(X)$ funzioni continue su X a valori complessi: è un'algebra di Banach commutativa. I punti di X sono in corrispondenza biunivoca con gli omomorfismi $\mathrm{C}(X) \to \mathbb{C}$, cioè con gli ideali massimali di $\mathrm{C}(X)$. In altre parole X è ricostruibile da $\mathrm{C}(X)$, vista come algebra astratta; lo stesso succede per la topologia di X.

In generale a un'algebra di Banach commutativa B con $\mathbf{1}$ si associa uno spazio topologico $\widehat{B}$ i cui elementi sono gli ideali massimali. Gli elementi di B sono interpretabili come funzioni continue su $\widehat{B}$ mediante l'omomorfismo che associa a ogni $x \in B$ la trasformata di Fourier astratta $\hat{x}$.

Gli schemi (Grothendieck, circa 1955)

In analogia con la teoria di Gel'fand si associa ad ogni anello commutativo A l'insieme dei suoi ideali primi (non solo i massimali, per motivi tecnici), con una topologia definita a partire dalla struttura di A; sempre a partire da A, si definisce un fascio di anelli locali sullo spazio costruito. Questa struttura è lo schema affine definito da A. La teoria degli anelli commutativi è equivalente a quella degli schemi affini. Caso particolare: se A è un'algebra di tipo finito su un campo K si ottengono le varietà algebriche affini su K.

Questo aggiunge una dimensione globale all'algebra commutativa, permettendo di costruire spazi più complessi "incollando" tra loro schemi affini. L'algebra commutativa diviene l'aspetto locale della geometria algebrica.

La geometria di Arakelov (1974)

L'analogia tra campi di numeri algebrici e campi di funzioni meromorfe su superficie di Riemann era già stata notata e usata nel XIX secolo da Dedekind e Kronecker.

Un sistema di equazioni diofantee omogenee definisce uno schema proiettivo su $\mathbb{Z}$, che può essere visto come la famiglia delle riduzioni modulo tutti i primi razionali della varietà stessa. L'idea di Arakelov è di "completare" la famiglia aggiungendo una fibra all'infinito che è la varietà complessa definita dalle equazioni di partenza. La teoria è applicata con successo a varie questioni diofantee, e ha tra l'altro portato alla dimostrazione della congettura di Mordell (Faltings 1983).

8. La geometria non commutativa

Esempio: quantizzazione per deformazione di varietà di Poisson (Kontsevich 1997)

M varietà differenziabile, A anello delle funzioni differenziabili su M. Uno star-prodotto è un prodotto associativo su $A[[\varepsilon]]$ (serie formali) dato in grado zero da

$$f \star g = fg + \varepsilon B_1(f,g) + \varepsilon^2 B_2(f,g) + \cdots$$

dove i B_i sono operatori differenziali lineari nelle due variabili, esteso per $\mathbb{R}[[\varepsilon]]$-linearità. Le relazioni di associatività mostrano che la parte antisimmetrica di B_1 ha le proprietà formali di una parentesi di Poisson, e definisce quindi quella che si chiama una struttura di Poisson su M.

Kontsevich mostra che, viceversa, ogni struttura di Poisson si estende a uno star-prodotto in modo canonico, modulo una opportuna equivalenza di gauge.

ringrazio Maple, Canvas e Acrobat