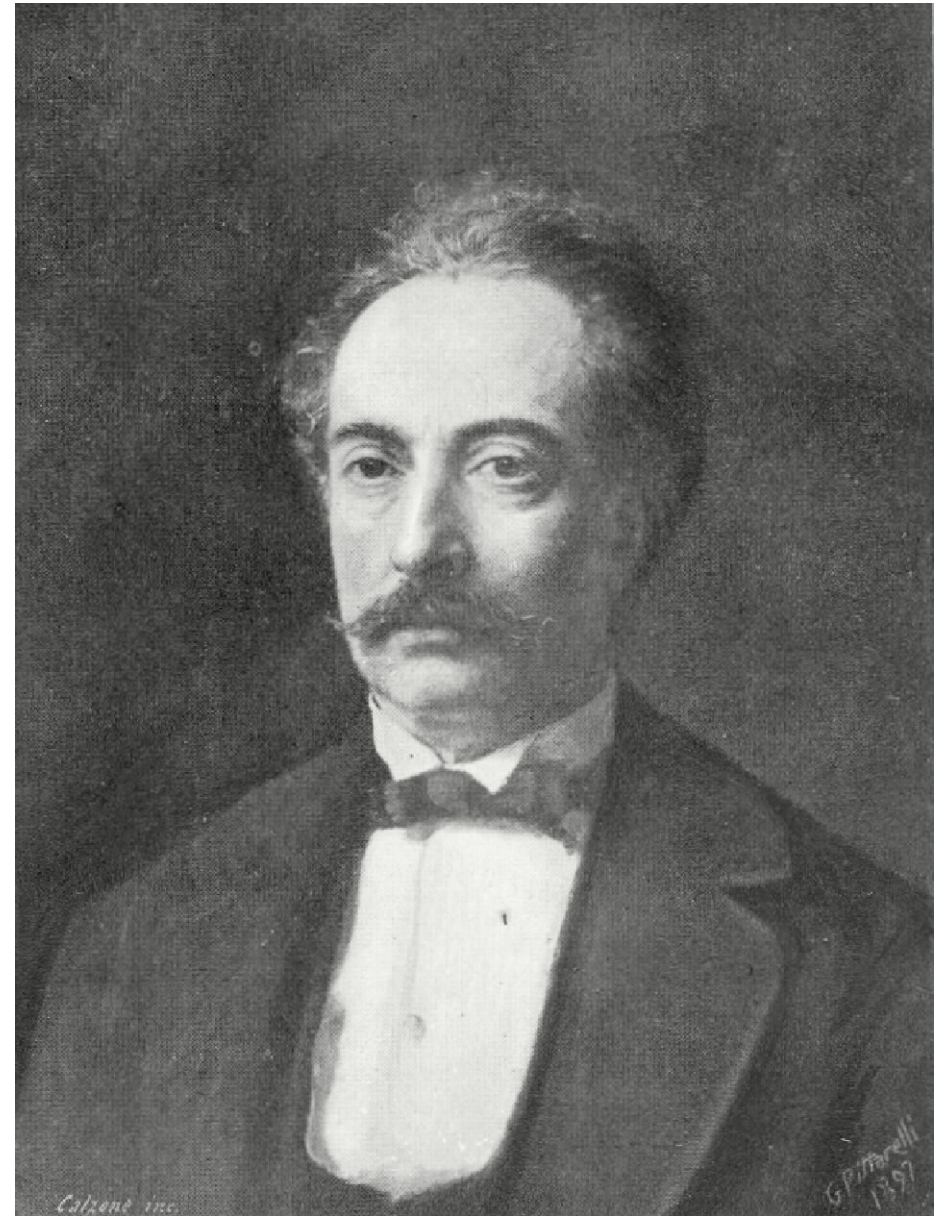
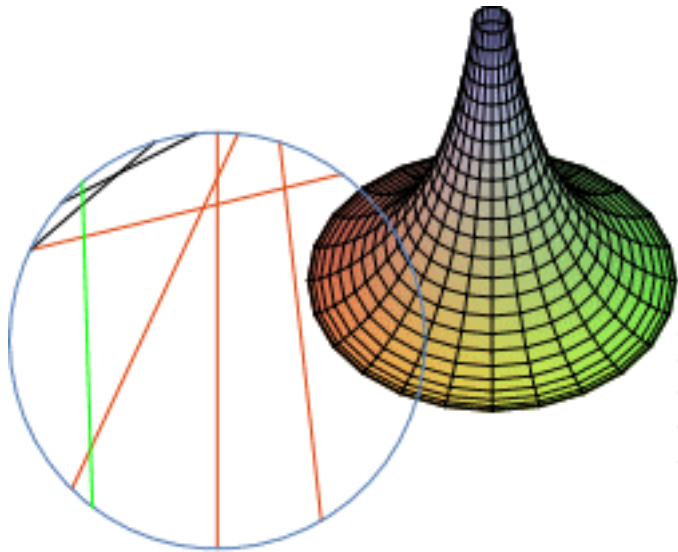


Maurizio Cornalba

Attualità di EUGENIO BELTRAMI

Cremona, 20 maggio 2000



Cronologia essenziale

- Nasce a Cremona il 16-11-1835
- 1853-1856: studia matematica presso l'Università di Pavia
- 1856-59: interrotti gli studi universitari per ristrettezze economiche, è segretario del direttore delle ferrovie del Lombardo-Veneto, a Verona
- 1860: trasferitosi a Milano, riprende gli studi matematici
- 1862: è nominato professore straordinario a Bologna
- 1864: si trasferisce presso l'Università di Pisa
- 1866: ritorna a Bologna
- 1873: si trasferisce presso l'Università di Roma
- 1876: si trasferisce presso l'Università di Pavia
- 1891: ritorna a Roma
- 1898: diviene presidente dell'Accademia dei Lincei
- 1899: è nominato senatore
- Muore a Roma il 18-2-1900

Prima e dopo Beltrami

Ebbero forte influenza sulla formazione matematica di Beltrami i matematici:

- **Francesco Brioschi** (1824-1897, fondatore del Politecnico di Milano), suo professore a Pavia, ritrovato poi a Milano
- **Luigi Cremona** (1830-1903), conosciuto a Pavia durante gli anni dell'università e poi ritrovato a Milano e in seguito a Bologna
- **Enrico Betti** (1823-1892), conosciuto a Pisa
- **Felice Casorati** (1835-1890), suo coetaneo e compagno di studi a Pavia, e in seguito per lunghi anni suo collega presso l'Università di Pavia

Una forte influenza indiretta, sia attraverso Betti che attraverso gli scritti, ebbe anche **Bernhard Riemann** (1826-1866), cui principalmente si deve la svolta rivoluzionaria che ha portato al modo moderno di concepire la geometria.

Beltrami fu uno dei primi continuatori, sia in Italia che fuori d'Italia, dell'opera di Riemann nell'ambito della geometria differenziale.

L'opera geometrica di Beltrami e le sue speculazioni sulla natura dello spazio si inseriscono perfettamente in quella corrente di pensiero che porta da Gauss e Riemann al calcolo differenziale assoluto di Levi-Civita, alla relatività generale e in generale alla moderna geometria differenziale.

La realizzazione concreta della geometria non euclidea (Giornale di Matematiche, 1868)

)(284)(

SAGGIO DI INTERPETRAZIONE DELLA GEOMETRIA NON-EUCLIDEA

DEL PROFESSOR

E. BELTRAMI



In questi ultimi tempi il pubblico matematico ha incominciato ad occuparsi di alcuni nuovi concetti i quali sembrano destinati , in caso che prevalgano , a mutare profondamente tutto l'ordito della classica geometria :

Una **geodetica** su una superficie è:

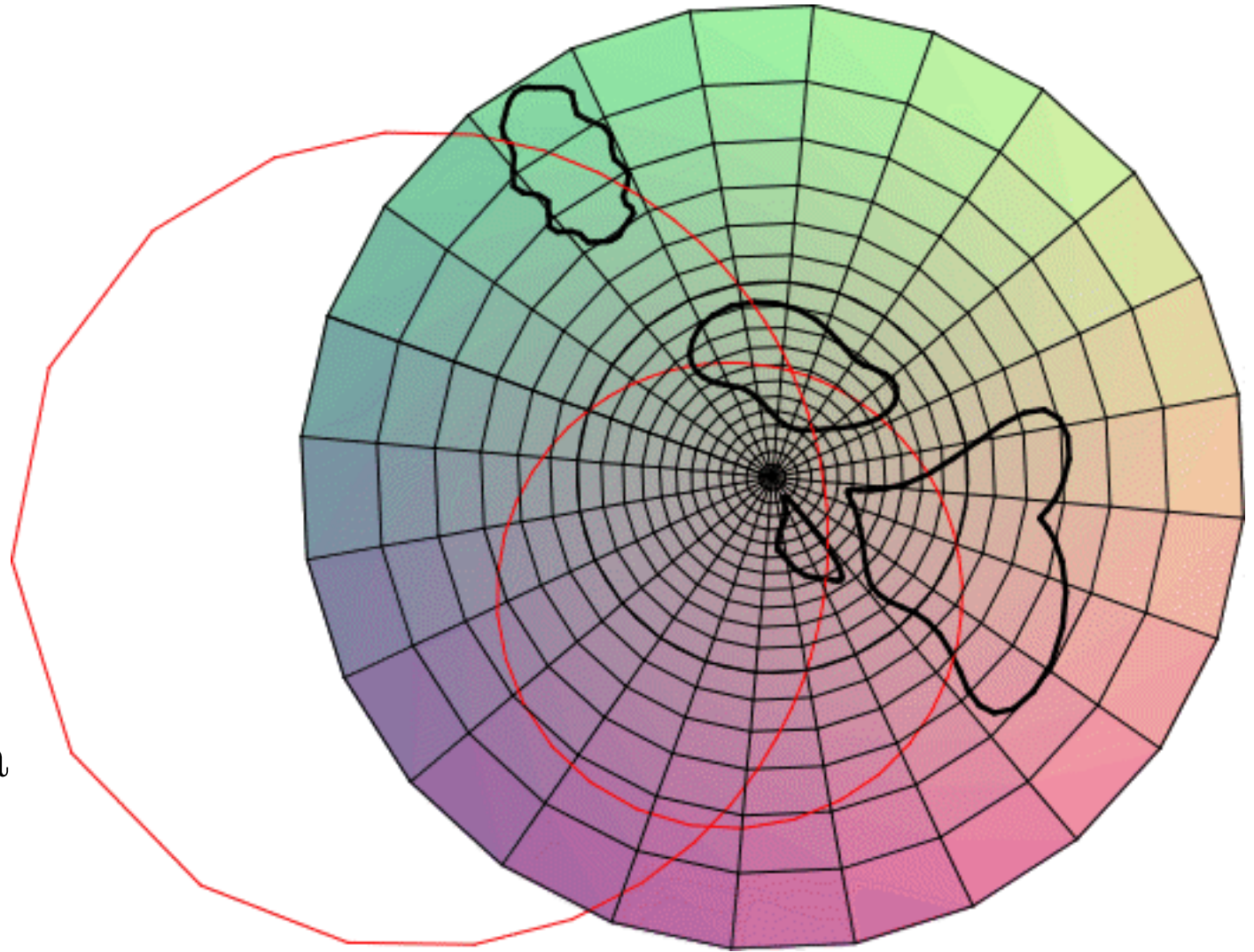
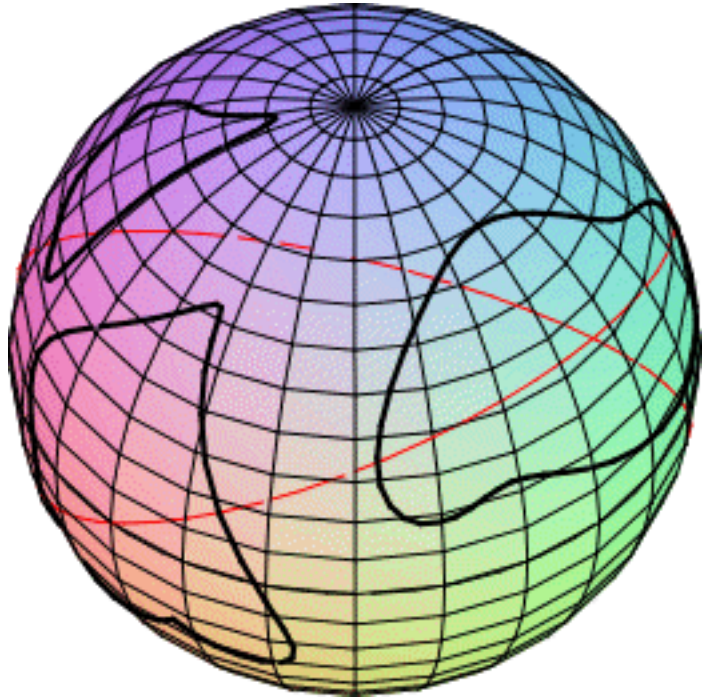
- Una linea che realizza, fra due suoi qualsiasi punti, purché sufficientemente vicini, il tragitto (sulla superficie) più breve
- La traiettoria descritta da un punto materiale che si muova, senza attrito e non soggetto a forze esterne, sulla superficie

Le geodetiche **sul piano sono le rette**. Le geodetiche **su una sfera sono i cerchi massimi**. Per un essere bidimensionale vivente su una superficie le “rette” sono le geodetiche.

Carte geografiche

Una carta geografica è una rappresentazione piana di una parte della superficie terrestre; è impossibile trovare carte geografiche che siano del tutto fedeli, nel senso di riprodurre fedelmente (in proporzione) le distanze.

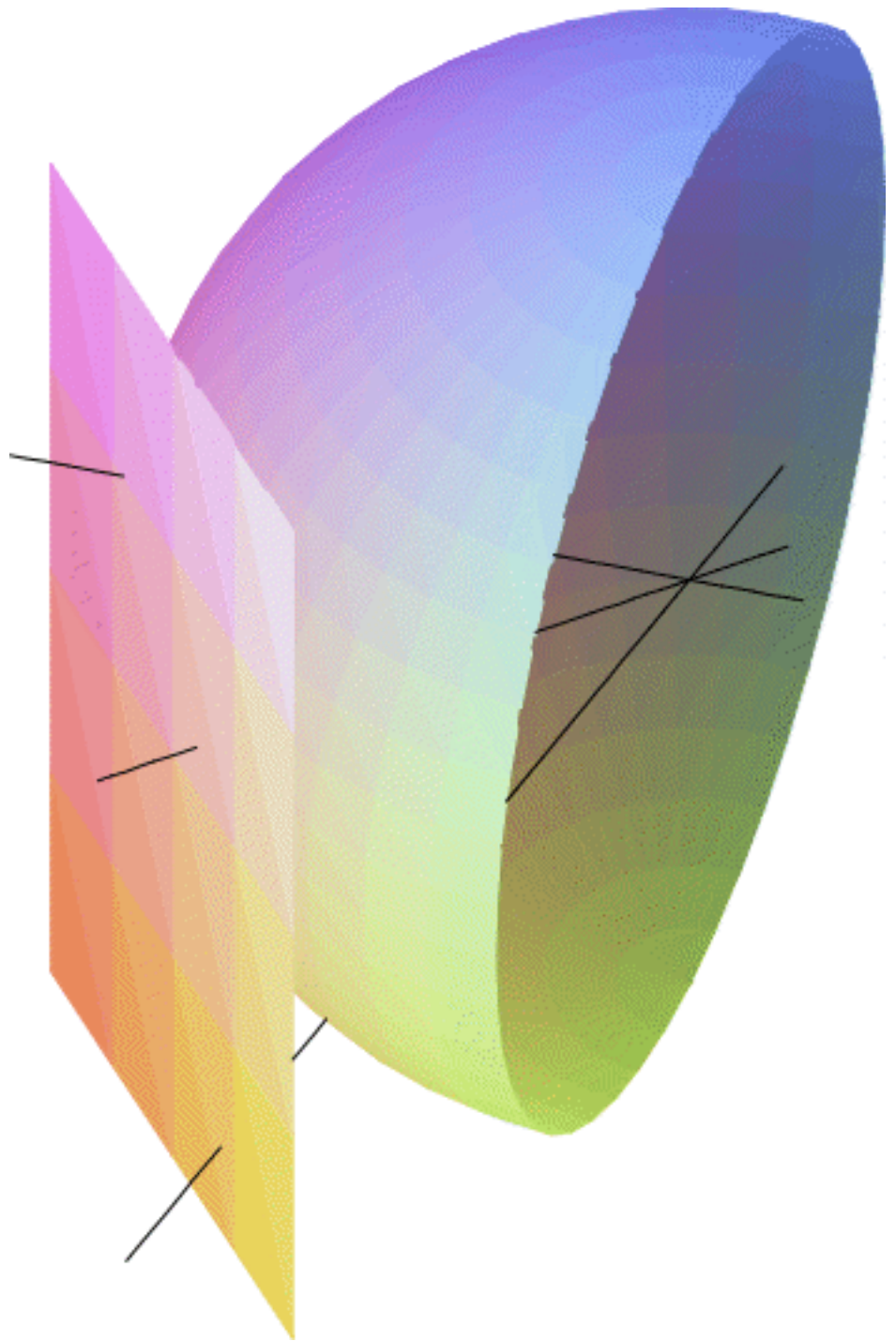
Le carte usuali di solito preservano alcune caratteristiche, ad esempio gli angoli (carte conformi), ma non altre.



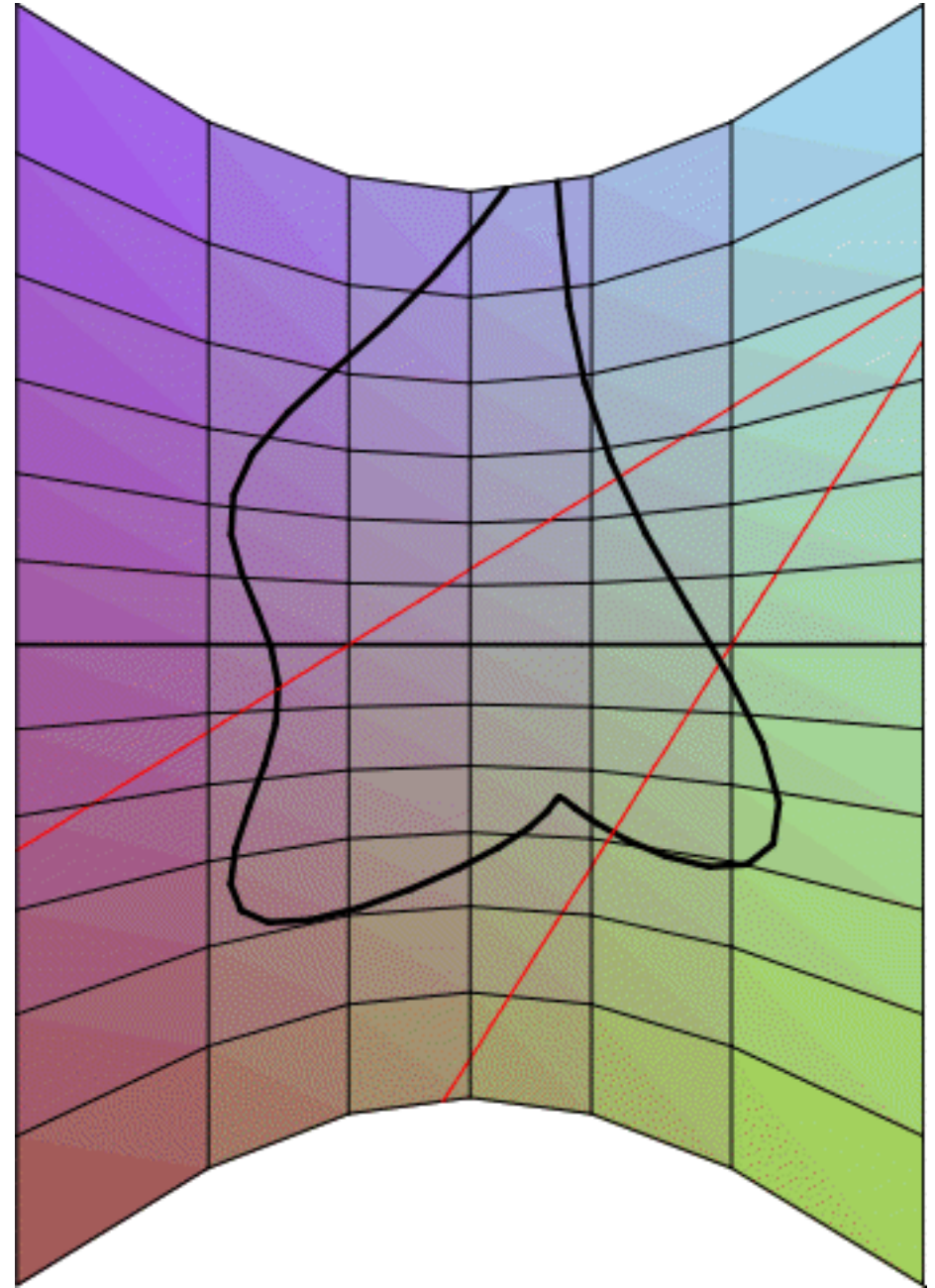
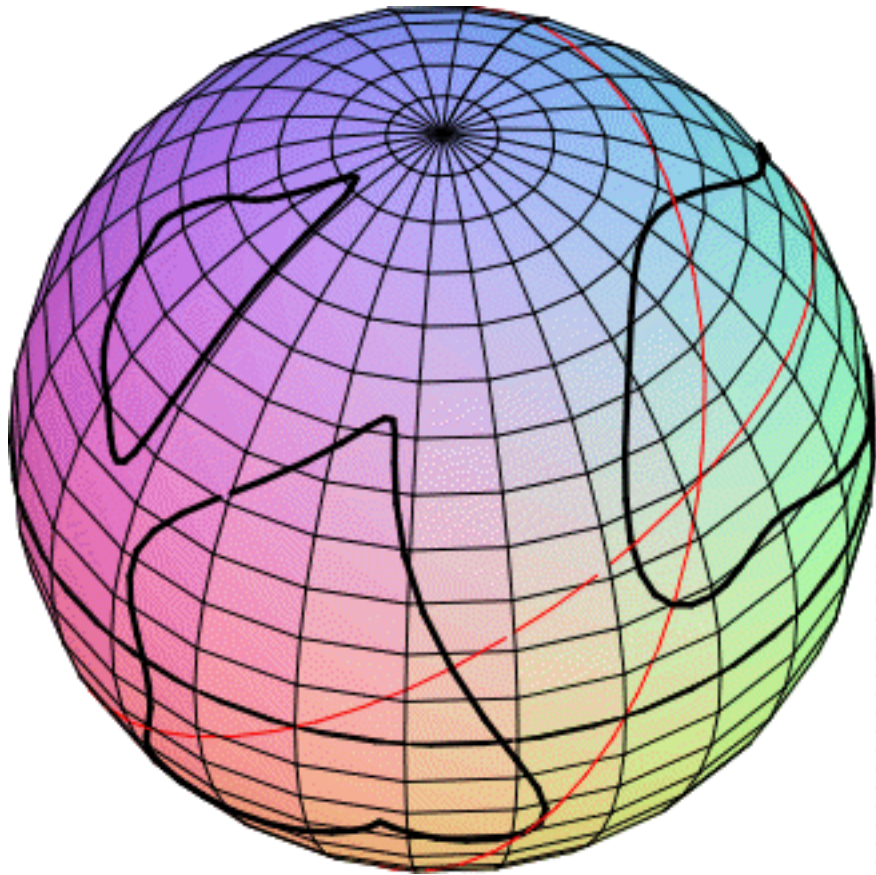
Proiezione stereografica
dal polo Sud
(tra 45° S a 90° N)

Problema: data una superficie,
è possibile trovarne una carta
in cui le geodetiche
appaiano come rette?

Per la sfera è possibile,
proiettando dal centro
della sfera su un piano



Ed ecco il risultato



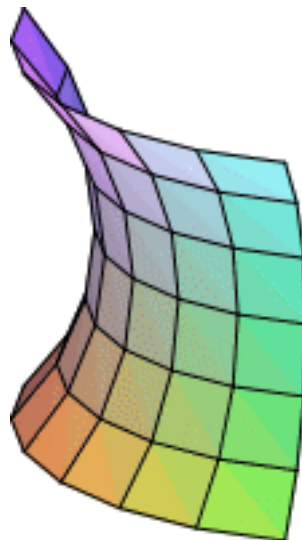
Beltrami risolse il problema (1865), mostrando che le sole superfici per cui il problema ha risposta affermativa sono quelle di **curvatura costante** (come ad esempio le sfere, i piani, i cilindri)

curvatura

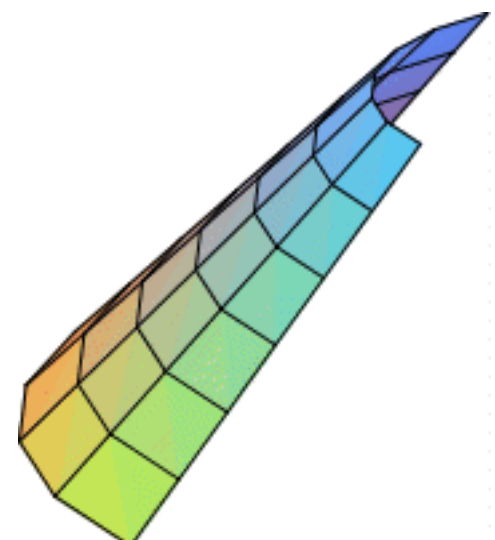
positiva



negativa



nulla

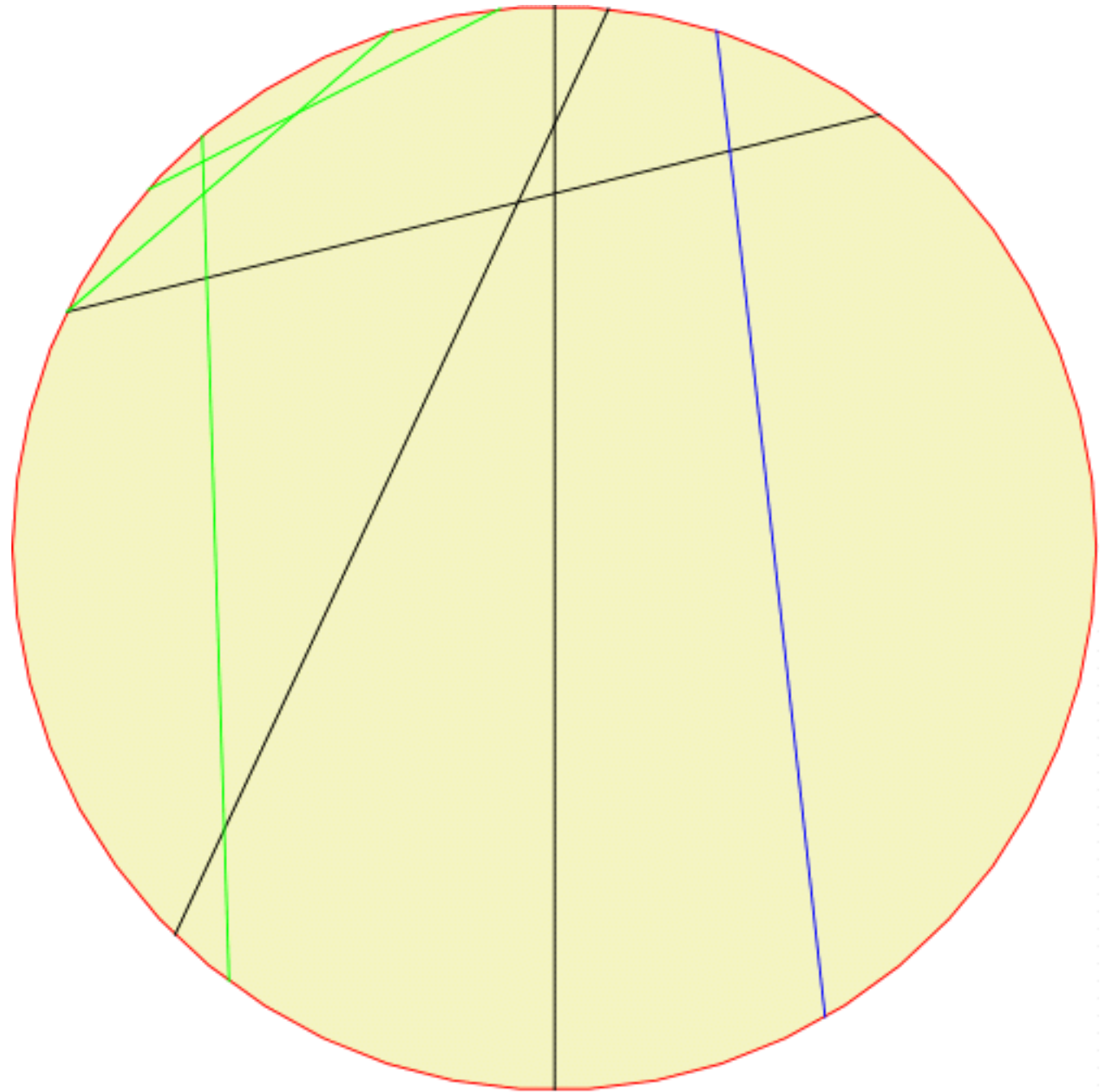


Idea: costruire un modello di geometria non euclidea prendendo come spazio una superficie di curvatura costante negativa e come rette le sue geodetiche

Difficoltà: nello spazio ordinario non ci sono superficie di curvatura costante negativa le cui geodetiche si possano estendere indefinitamente (dimostrato in seguito da Hilbert)

Scappatoia: ve ne sono però nello spazio-tempo di Minkowski, e anche nel suo analogo tridimensionale; sono degli analoghi, in questa situazione, delle sfere dello spazio ordinario. Beltrami, pur esprimendosi in termini assai diversi, considerò in sostanza una di queste superficie e ne costruì una “carta geografica” in cui tutte le geodetiche vengono rappresentate come rette.

La “carta geografica”
del piano iperbolico
costruita da Beltrami



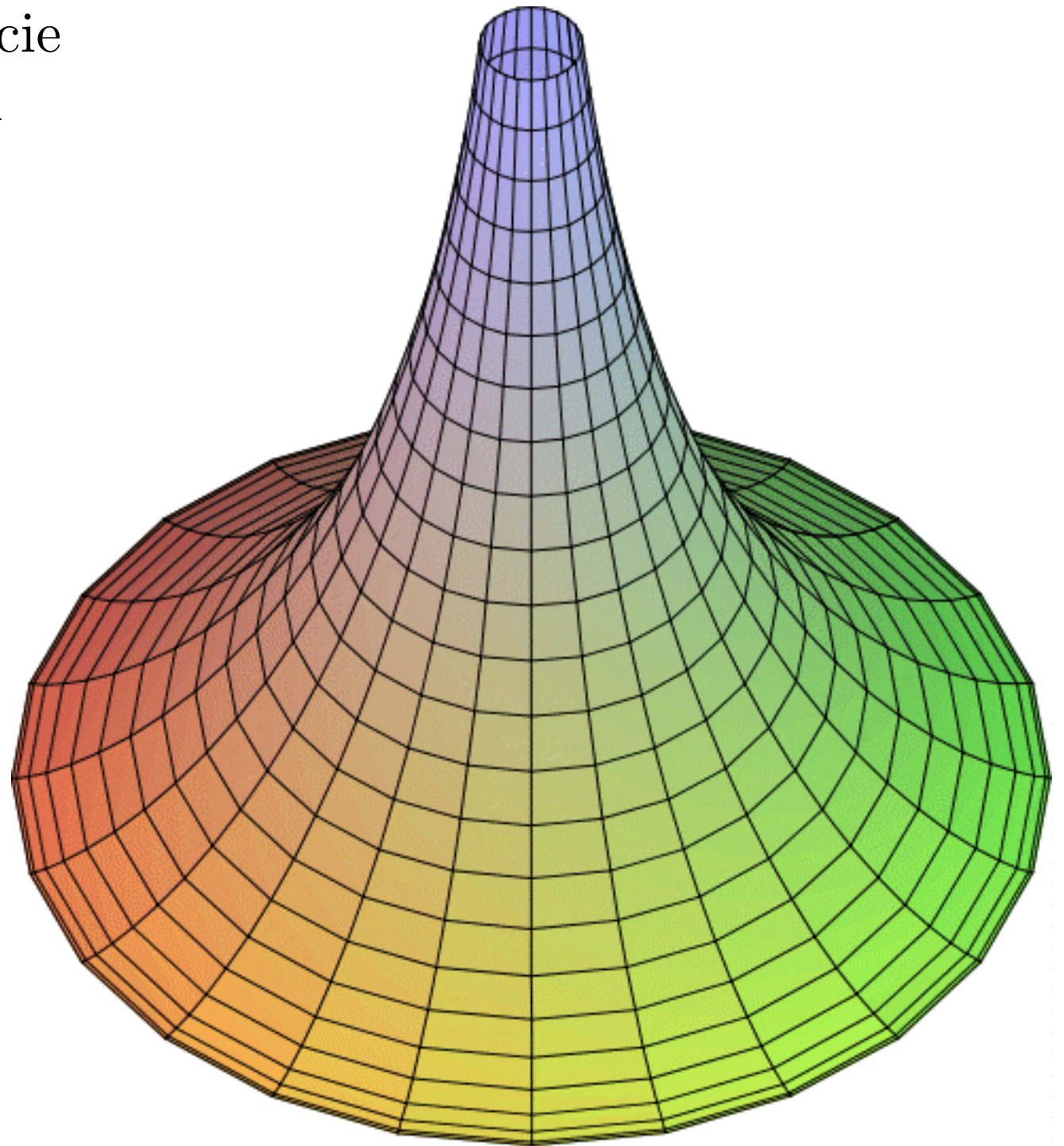
Il modello è un disco (bordo escluso) nel piano usuale, e le geodetiche vi appaiono come porzioni di rette

Attenzione!

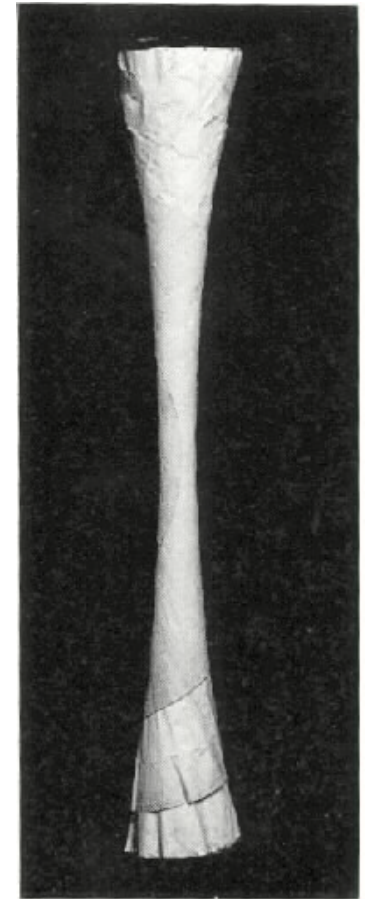
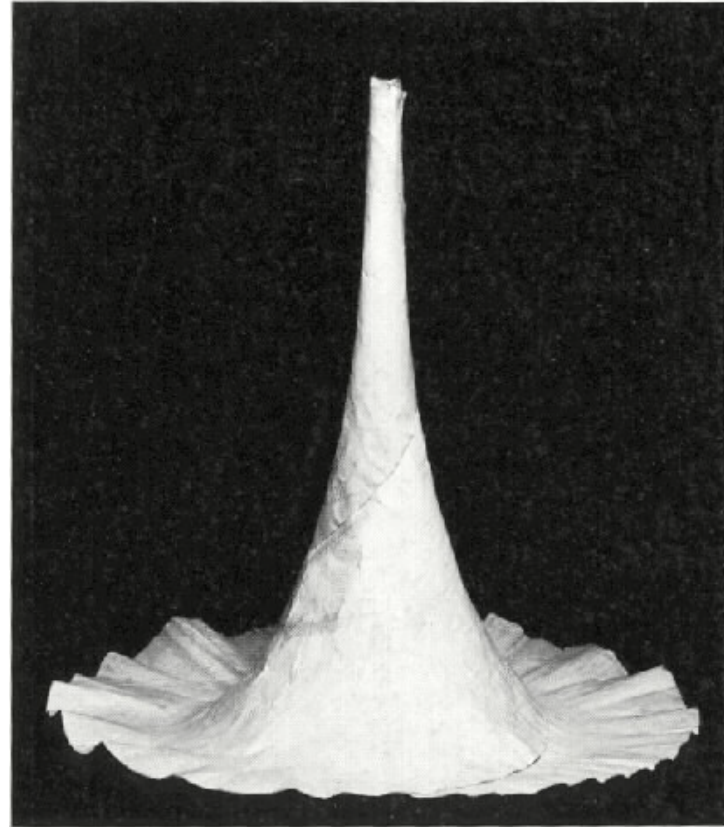
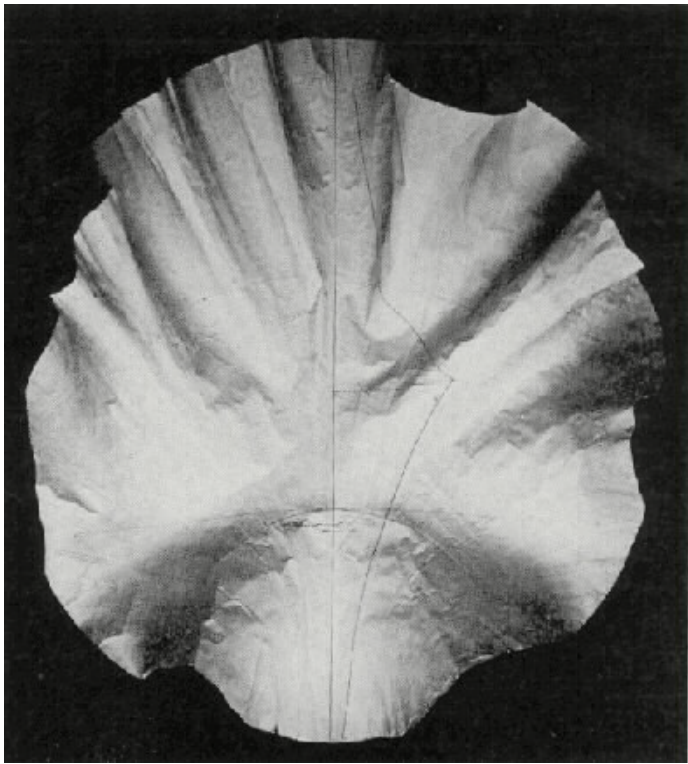
1. La misura delle distanze e degli angoli non è quella usuale; le distanze divengono tanto più grandi, e gli angoli più piccoli, rispetto a quelli usuali, quanto più ci si avvicina al bordo del disco.
2. Le geodetiche sono indefinitamente estese e hanno lunghezza infinita.

Nel modello tutti gli assiomi della geometria euclidea sono soddisfatti, **tranne quello che afferma, dati una retta e un punto ad essa esterno, l'esistenza di un'unica retta passante per il punto che non incontra la retta data.** Nel modello queste rette sono **infinite.**

Una porzione di superficie
di curvatura costante -1
nello spazio ordinario:
la pseudosfera



e un modello in carta
di superficie di curvatura
costante negativa
costruito da Beltrami
intorno al 1869:
la “cuffia di Beltrami”



Gli altri contributi di Beltrami alla scienza matematica

- **I differenziali di Beltrami.** Sono tuttora uno strumento fondamentale nello studio delle applicazioni quasi-conformi e nello studio dei moduli delle superficie algebriche
- **L'operatore di Laplace-Beltrami.** Generalizza a varietà di dimensione qualunque e con metrica qualunque il classico operatore di Laplace. Questa scoperta di Beltrami è all'origine di numerosissimi sviluppi nel campo dello studio delle equazioni a derivate parziali su varietà, quali la teoria di Hodge, la teoria dell'indice, ecc. . . . È la chiave di volta delle interazioni tra analisi e topologia delle varietà.

- Praticamente tutte le ricerche di Beltrami, incluse quelle sulla natura dello spazio, sono motivate da problemi fisici. Dagli anni '70 in poi si occupò quasi esclusivamente di fisica matematica; la maggior parte della sue oltre 100 pubblicazioni sono dedicate a problemi fisico-matematici. Si occupò tra l'altro di elettromagnetismo e in particolare della teoria di Maxwell, di teoria dell'elasticità, della propagazione del calore, di dinamica dei fluidi.