

Stage

Matrici: geometria e algebra

16 giugno 2022

1. Operazioni sui numeri e loro proprietà.
2. Vettori di $\mathbb{R}^2$. Matrici 2×2 . Generalizzazioni: $\mathbb{R}^n$ e matrici $m \times n$.
3. Coefficienti a_{ij} .
4. Prodotto di una riga per una colonna.
5. Prodotto righe per colonne.
6. Somma di vettori e di matrici.
7. La somma è commutativa?
8. Il prodotto è associativo?
9. $M_2(\mathbb{R})$ è un anello. Come $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$.
10. Il prodotto è commutativo?
11. È vero che $AB = 0$ solo se $A = 0$ o $B = 0$?
12. Matrici invertibili. Determinante. Inversa.
13. Il campo dei numeri complessi come sottoanello di $M_2(\mathbb{R})$.
14. Le rotazioni del piano. La loro rappresentazione matriciale: la moltiplicazione per

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

rappresenta la rotazione di angolo θ in senso antiorario. Invece la moltiplicazione per

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}$$

rappresenta la riflessione rispetto alla retta s passante per l'origine e per il punto $(\cos(\theta/2), \sin(\theta/2))$, cioè $y = \tan(\theta/2) \cdot x$.

15. Equazione parametrica della retta nel piano:

$$\begin{aligned}y - y_0 &= \tan \alpha (x - x_0) \\y_1 - y_0 &= \tan \alpha (x_1 - x_0) \\t &:= \frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} \\&\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases}\end{aligned}$$

Rette in $\mathbb{R}^n$.

16. Un esempio di sistema lineare:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 8 \\ x - 2y + z = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = t + 10 \\ y = t + 4 \\ z = t. \end{cases}$$

17. Sistemi lineari: uno 3×3 con soluzione unica, uno senza soluzione, uno con una retta di soluzioni.

$$\begin{aligned}&\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases} && \text{soluzione: } X = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\&\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 0 \\ x + z = 2 \end{cases} && \text{soluzione: } X = \begin{pmatrix} 2 - t \\ t \\ t \end{pmatrix} \\&\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 0 \\ x + z = 3 \end{cases} && \text{nessuna soluzione!}\end{aligned}$$

18. Possiamo scrivere i sistemi lineari in forma matriciale; $AX = B$. Contano solo A e B .
19. Il caso quadrato con matrice dei coefficienti invertibile: $X = A^{-1}B$. La soluzione esiste ed è unica.
20. Come riconoscere una matrice invertibile? Con il determinante! Determinante di matrici 1×1 e 2×2 . Definizione induttiva del determinante. Sviluppo lungo qualsiasi colonna e lungo qualsiasi riga.
21. Proprietà del determinante:
- (a) Se una colonna di A è nulla, allora $\det A = 0$.

- (b) Scambiando due colonne il determinante cambia di segno. Per esempio se $A = (A^1|A^2|A^3|\dots|A^n) \in M(n)$,

$$\det(A^2|A^1|A^3|\dots|A^n) = -\det A.$$

- (c) $\det(\lambda A^1|A^2|\dots|A^n) = \lambda \cdot \det A$. Lo stesso se moltiplico per λ un'altra colonna invece di A^1 .
- (d) $\det(C_1 + C_2|A^2|\dots|A^n) = \det(C_1|A^2|\dots|A^n) + \det(C_2|A^2|\dots|A^n)$.
Lo stesso se A^j (invece di A^1) è somma di due vettori.
- (e) Se $A^i = A^j$ e $i \neq j$, allora $\det A = 0$.
- (f) Se sommo ad una colonna di A un multiplo di un'altra colonna, il determinante non cambia.
- (g) Tutte le operazioni sopra valgono per le righe al posto delle colonne.