

Esercizio 1.

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 9 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = -9. \quad (1)$$

Qui basta sviluppare lungo la prima colonna.

Esercizio 2.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0. \quad (2)$$

Esercizio 3.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 9 & 0 & 1 \\ 6 & -3 & 1 \end{pmatrix} = -51. \quad (3)$$

Conviene sviluppare lungo la seconda colonna.

Esercizio 4.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -58. \quad (4)$$

Se sviluppiamo lungo la prima riga dobbiamo fare solo 2 determinanti 2×2 .

Esercizio 5.

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = 64. \quad (5)$$

Esercizio 6.

$$\det \begin{pmatrix} 2 & -8 & -2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix} = -106. \quad (6)$$

Esercizio 7.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 4 & -8 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 92. \quad (7)$$

Esercizio 8.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} = -2. \quad (8)$$

Esercizio 9. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(x) := \begin{pmatrix} x & -x & 2 \\ x & -x & -1 \\ 2x & 2x & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile? *Calcoliamo*

$$\det \begin{pmatrix} x & -x & 2 \\ x & -x & -1 \\ 2x & 2x & -2 \end{pmatrix} = 12x^2. \quad (9)$$

Dunque la matrice è invertibile se e soltanto se $x \neq 0$.

Esercizio 10. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(x) := \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile?

$$\det \begin{pmatrix} x & 0 & 3 \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix} = -24x^2 + 6x = -6x(4x - 1). \quad (10)$$

Questo polinomio si annulla per $x = 0$ e per $x = 1/4$. Quindi la matrice $A(x)$ è invertibile se e solo se $x \in \mathbb{R} - \{0, 1/4\}$.

Esercizio 11. Per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ la matrice

$$A(x) := \begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix}$$

è invertibile?

$$\det \begin{pmatrix} 3x & x & x \\ 4x & -x & -1 \\ 2 & -2x & -2 \end{pmatrix} = -8x^3 + 10x^2 - 2x = -2x(4x^2 - 5x + 1). \quad (11)$$

La matrice $A(x)$ è invertibile se e solo se $x \in \mathbb{R} - \{0, 1/4, 1\}$.

Esercizio 12. Dimostrare che

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (a-1)(b-1)(b-a).$$

Possiamo usare la terza riga per ricondurci a una matrice con la prima colonna della forma $(0, 0, 1)$. Quindi possiamo raccogliere $(a-1)$ nella prima riga e $(b-1)$ nella seconda. Alla fine basta fare un determinante 2×2 .

Esercizio 13. Calcolare

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix}.$$

Procedendo come nell'esercizio precedente si trova

$$\det \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{pmatrix} = (a-c)(b-c)(b-a).$$

Esercizio 14.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -8 & 0 & -2 \\ 3 & -12 & -1 & -2 \\ 4 & -12 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (12)$$

Facendo una operazione sulle righe (sommare la I alla III) troviamo subito una colonna con tre zeri, quindi ci riconduciamo subito a un determinante 3×3 .

Esercizio 15.

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & -1 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} = 0. \quad (13)$$

Con una sola operazione sulle righe possiamo mettere tre zeri in una riga, in modo da ricondurci subito a un determinante 3×3 . Qual è l'operazione? È sostituire la riga IV con $IV - 2 \cdot II$.

Esercizio 16.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -54. \quad (14)$$

Se sostituisco la IV riga con $IV - 2 \cdot I$, ottengo tre zeri nella IV riga, e mi riconduco subito a un determinante 3×3 .

Esercizio 17.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 5 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 8 & 3 \end{pmatrix} = 604. \quad (15)$$

Esercizio 18.

$$\det \begin{pmatrix} 7 & 7 & -21 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 84. \quad (16)$$

Esercizio 19.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -1 \\ 2 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 32. \quad (17)$$

Esercizio 20.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 0. \quad (18)$$