

Matematica al calcolatore: possiamo fidarci?

Francesca Gardini e Pietro Zanotti

Dipartimento di Matematica
Università degli Studi di Pavia

Stage estivo

Pavia, 14-17 giugno 2022

Chi siamo



Francesca Gardini
Professore associato



Pietro Zanotti
Ricercatore

Cosa facciamo

Sviluppiamo ed implementiamo tecniche di calcolo per approssimare la soluzione di particolari problemi, detti equazioni alle derivate parziali

Applicazioni

- Meccanica dei solidi
- Dinamica dei fluidi
- Elettromagnetismo
- ...

Mar 14 (10:45-12:45)

Matematica al calcolatore – Parte 1

Mer 15 (14:30-16:30)

Matematica al calcolatore – Parte 2

Gio 16 (10:45-12:45)

Possiamo fidarci?

Competenze

Sviluppo e implementazione di tecniche di calcolo

Nozioni

Proprietà che determinano l'affidabilità di una tecnica di calcolo

Cosa fa un calcolatore?

Svolge automaticamente operazioni elementari

Perché ci interessa?

Molti problemi di interesse possono essere risolti solo eseguendo grandi quantità di operazioni elementari

Importanza del calcolatore

Consente di risolvere problemi difficili o intrattabili

Esempio

Il calcolatore *Colossus* ispirato da Alan Turing consentì agli inglesi di decifrare migliaia di messaggi tedeschi durante la seconda guerra mondiale

Secondo il premier britannico Winston Churchill, il lavoro di Alan Turing aiutò a ridurre dai due ai quattro anni la guerra in Europa, salvando così quattordici milioni di vite

Sapreste indicare qualche altro problema rilevante per la cui soluzione è determinante l'utilizzo di un calcolatore?

Matematica al calcolatore - Parte 1

Si vuole approssimare, con l'ausilio di un calcolatore, la lunghezza di un arco di parabola

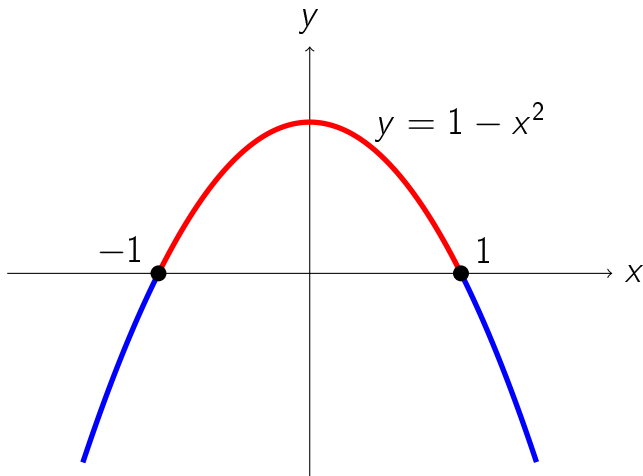
Per cominciare, mettiamoci in un caso particolare

- Parabola $y = 1 - x^2$
- Arco compreso tra i punti di ascissa ± 1

Non è un problema di grande interesse ma...

- è abbastanza semplice per cominciare
- è abbastanza complesso per apprendere alcuni concetti generali

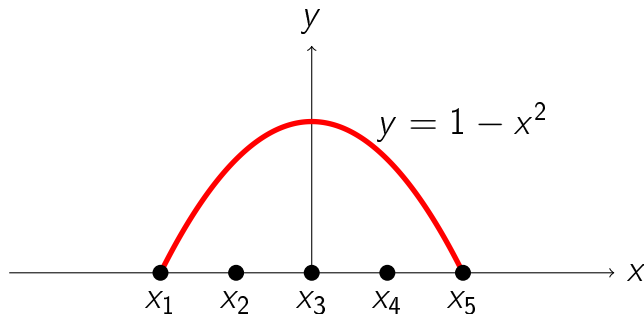
***Approssimare la lunghezza dell'arco
di parabola evidenziato in rosso***



Dividetevi in gruppi

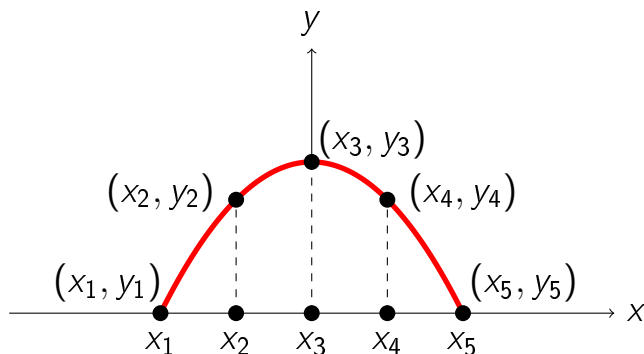
- provate a pensare come risolvereste il problema
- concentratevi sulla strategia, faremo fare i conti ad un calcolatore

Introduciamo n punti equispaziati $x_1, \dots, x_n$
sull'asse delle ascisse tra -1 e 1

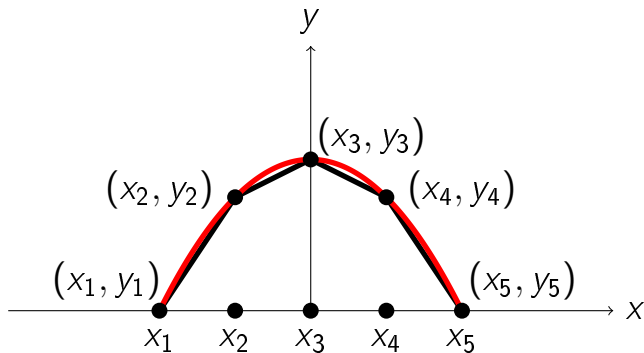


Calcoliamo le corrispondenti ordinate $y_1, \dots, y_n$ sulla parabola sfruttandone l'equazione, ovvero

$$y_k = 1 - x_k^2$$



Congiungiamo i punti sulla parabola con una linea spezzata e approssimiamo la lunghezza dell'arco di parabola con la lunghezza della spezzata



Tocca (di nuovo) a voi

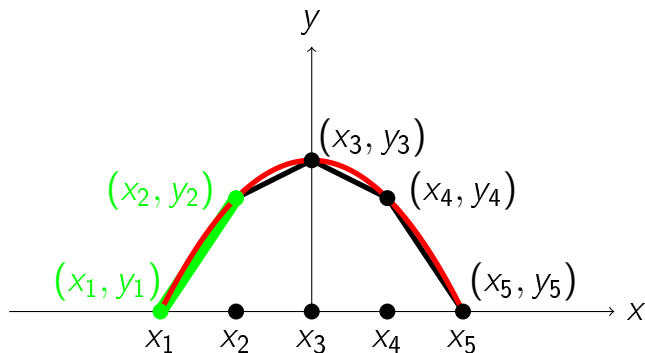
Dividetevi nuovamente in gruppi

- provate a formalizzare questa tecnica di calcolo
- ragionate come se doveste fare i conti con una calcolatrice

Tecnica di calcolo

Dobbiamo sommare le lunghezze dei vari segmenti.
Il primo segmento misura

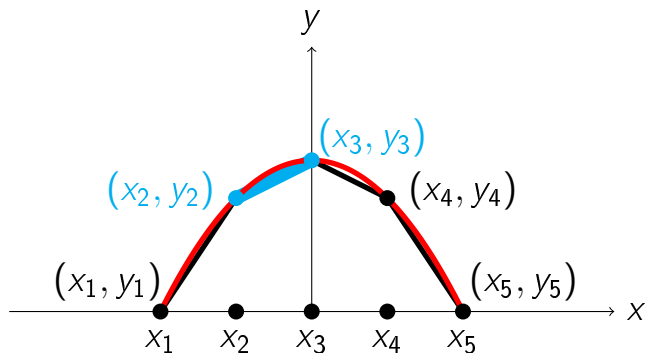
$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



Tecnica di calcolo

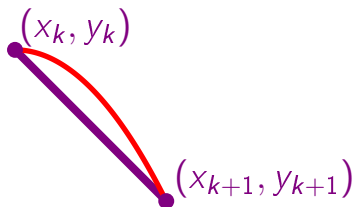
Dobbiamo sommare le lunghezze dei vari segmenti.
Il secondo segmento misura

$$\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$$



Dobbiamo sommare le lunghezze dei vari segmenti.
In generale, il k -esimo segmento misura

$$\sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$



Algoritmo

$$n = \dots$$

numero punti

$$h = 2/(n-1)$$

ampiezza intervalli

$$x_1 = -1$$

ascisse punti

$$\text{per } k = 2, \dots, n$$

$$x_k = x_{k-1} + h$$

$$\text{per } k = 1, \dots, n$$

ordinate punti

$$y_k = 1 - x_k^2$$

$$L = 0$$

approssimazione lunghezza

$$\text{per } k = 1, \dots, n-1$$

$$L = L + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$$

In questo caso la lunghezza dell'arco è nota

$$L_{\text{ex}} = 2.9578857...$$

*possiamo verificare l'accuratezza
dell'approssimazione calcolando l'errore*

$$Err = |L_{\text{ex}} - L|$$

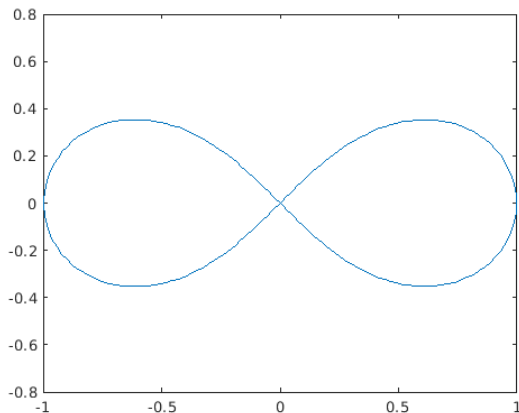
Vediamo l'implementazione dell'algoritmo in Matlab

Sareste capaci di...

- ...misurare un altro arco?
- ...lavorare con un'altra parabola?
- ...lavorare con un'altra curva?

Esempio

La Lemniscata di Bernoulli è il luogo dei punti del piano tali che il prodotto delle distanze da due punti fissati (fuochi) è costante



Cosa ci serve per modificare il nostro codice?

Parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \\ y = \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Lunghezza esatta (Gauss)

$$L_{\text{ex}} = 5.24412\dots$$

Matematica al calcolatore - Parte 2

Abbiamo utilizzato un calcolatore per approssimare la lunghezza dell'arco di una curva

- Tecnica di calcolo
(approssimazione curva con linea spezzata)
- Algoritmo
- Implementazione (Matlab)
- Verifica accuratezza

Programma parte 2

Mettiamo in pratica
quanto visto ieri

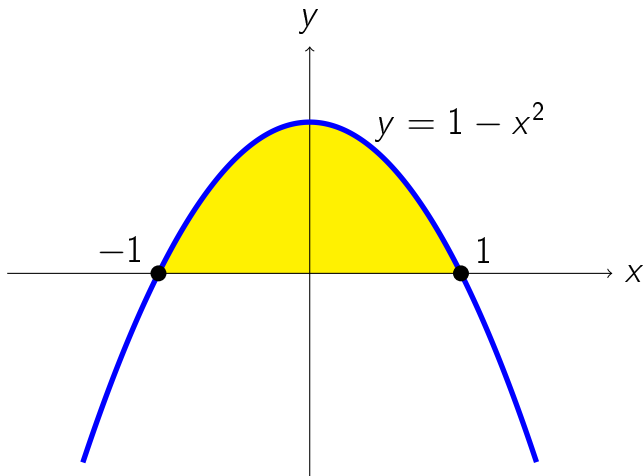
- Affrontiamo un problema analogo
- Sareste capaci di risolverlo da soli?

***Si vuole approssimare, con l'ausilio
di un calcolatore, l'area compresa
tra un arco di parabola e una retta***

Per cominciare, quale caso particolare considerereste?

Perché non lo stesso di ieri?

*Approssimare l'area della porzione
di piano in giallo*



Il problema di misurare un insieme è di fondamentale importanza in matematica

Ieri

Misura di una lunghezza (insieme mono-dimensionale)

Oggi

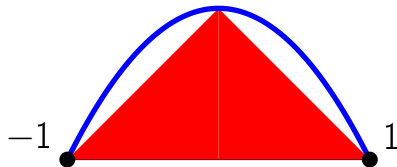
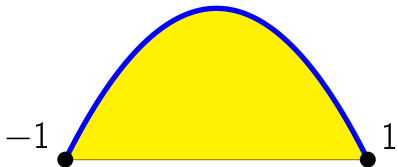
Misura di un'area (insieme bi-dimensionale)

A occuparsi del nostro problema fu per primo Archimede

Per quanto riguarda il segmento compreso da una retta e da una parabola, sappiamo che nessuno ha prima di noi tentato di misurarne l'area, ciò che da noi è stato ora trovato. Dimostriamo infatti che qualunque segmento compreso da una retta e da una sezione di parabola è uguale ai $\frac{4}{3}$ del triangolo avente la stessa base e altezza uguale al segmento

La formula di Archimede

$$\text{Area gialla} = \frac{4}{3} \text{ Area rossa}$$



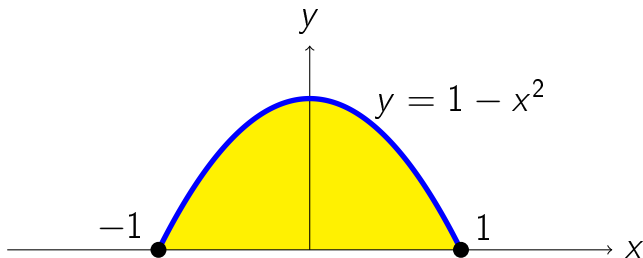
Nel nostro caso l'area gialla è pari a

$$A_{\text{ex}} = \frac{4}{3}$$

Tocca a voi

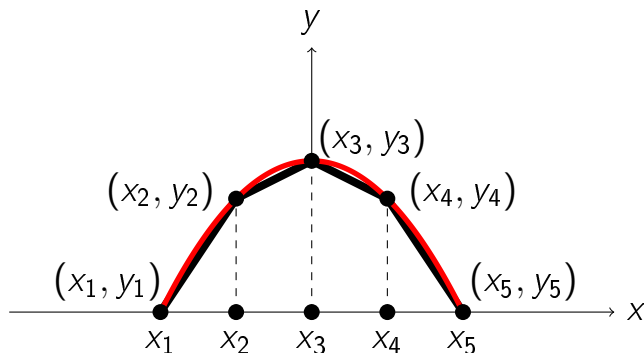
Dividetevi in gruppi

- provate a pensare come misurereste l'area gialla
- ragionate nello spirito di quanto visto ieri



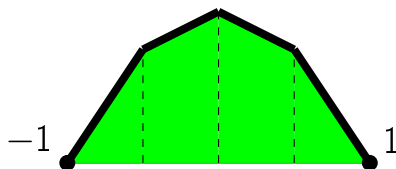
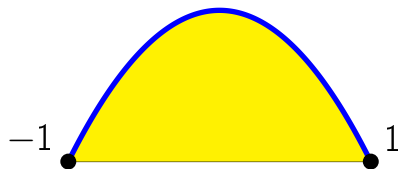
Procediamo in analogia con quanto fatto ieri

- Introduciamo n punti equispaziati $x_1, \dots, x_n$
- Calcoliamo le corrispondenti ordinate $y_1, \dots, y_n$
- Congiungiamo i punti sulla parabola con una spezzata



Approssimazione (formula dei trapezi)

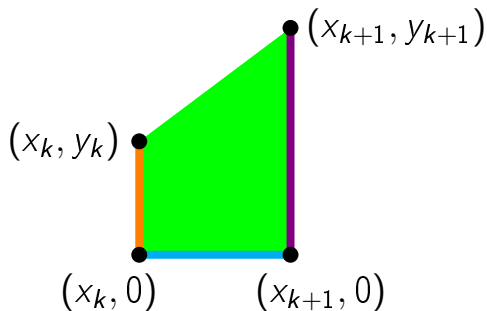
Approssimiamo l'area gialla con quella verde



*L'area verde è facile da calcolare perché
è somma di aree di trapezi rettangoli,
uno per ciascun intervallo sull'asse delle ascisse*

Area del generico trapezio

$$\text{Area} = \frac{(y_k + y_{k+1})(x_{k+1} - x_k)}{2}$$



Dividetevi nuovamente in gruppi

- La tecnica di calcolo è simile a quella di ieri
- Provate a scriverla sotto forma di algoritmo, ovvero come la implementereste

Algoritmo

$$n = \dots$$

numero punti

$$h = 2/(n-1)$$

ampiezza intervalli

$$x_1 = -1$$

ascisse punti

$$\text{per } k = 2, \dots, n$$

$$x_k = x_{k-1} + h$$

$$\text{per } k = 1, \dots, n$$

ordinate punti

$$y_k = 1 - x_k^2$$

$$A = 0$$

approssimazione area

$$\text{per } k = 1, \dots, n-1$$

$$A = A + (y_k + y_{k+1})(x_{k+1} - x_k)/2$$

Provate ad implementare l'algoritmo in Matlab

- Partite dall'implementazione di ieri e modificatela
- Per il calcolo dell'errore ricordate che il valore esatto dell'area è $A_{\text{ex}} = 4/3$

Come si comporta
l'errore se...

- ...facciamo diventare n
sempre più grande?
- ...passiamo da n a
 $2n$ punti?

Errori

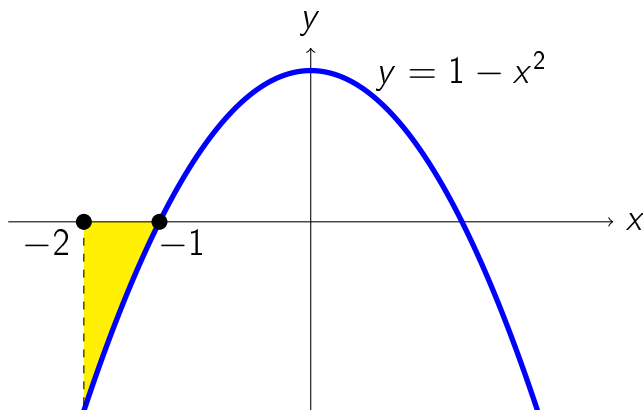
n	Errore	Rapporto
5	0.083333	
20	0.003693	4.46
40	0.000877	4.21
80	0.000214	4.10
160	0.000053	4.05
320	0.000013	4.02

$$\textbf{Errore} \approx \frac{1}{n^2}$$

Oltre il problema modello

Sareste capaci di...

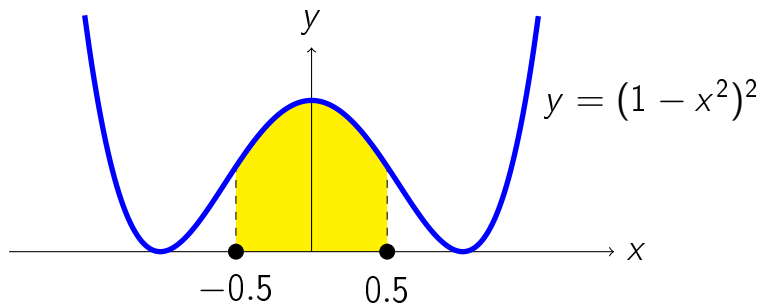
*...calcolare l'area relativa ad un intervallo diverso,
ad esempio quello qui sotto?*



Oltre il problema modello

Sareste capaci di...

*...calcolare un'area diversa,
ad esempio quella qui sotto?*



Oltre il problema modello

Sareste capaci di...

...modificare il codice, in modo da usare una delle seguenti tecniche di calcolo?

Punto medio

$$A = A + (x_{k+1} - x_k)y_{k+1/2}$$

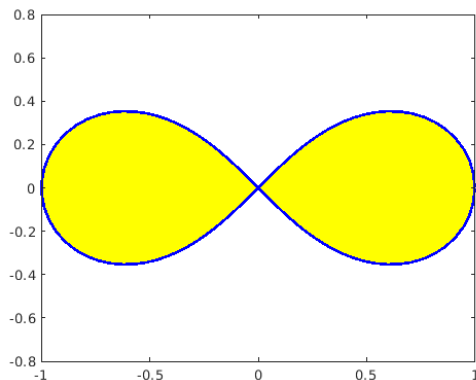
Cavalieri-Simpson

$$A = A + (x_{k+1} - x_k)(y_k + y_{k+1} + 4y_{k+1/2})/6$$

Ultimo sforzo

Sareste capaci di...

...modificare il codice, in modo da misurare l'area della regione delimitata dalla Lemniscata di Bernoulli?



Cosa ci serve per modificare il nostro codice?

Parametrizzazione

$$\begin{cases} x = \frac{\cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \\ y = \frac{\sin(t) \cos(t)}{1 + \sin(t)^2} \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

Area esatta

$$A_{\text{ex}} = 1$$