

Tende a dimenticare il passato?.... Forse è una catena di Markov



Matematica Attiva - Stage estivo - 15 Giugno 2022
Raffaella Carbone, Dipartimento di Matematica "F. Casorati",
Università di Pavia

Alice sull'isola

Alice vuole fare una visita a sorpresa al suo amico Bob, che abita su un'isola, ma quando arriva sull'isola scopre che vi sono cinque villaggi. Alice non parla la lingua locale, non ha una mappa e non sa quale sia il villaggio di Bob; è un po' distratta ed ama i viaggi avventurosi, quindi non si preoccupa...

Decide di perlustrare l'isola scegliendo ogni giorno in modo casuale di prendere un bus dalla città in cui si trova ad una di quelle adiacenti a seconda delle disponibilità, convinta che prima o poi arriverà al villaggio di Bob....



I processi aleatori e le catene di Markov

Campi di applicazione delle catene di Markov

1. Finanza
2. Code (Ingegneria, Servizi,...)
3. Assicurazioni (processo di Poisson)
4. processi di nascita e morte (Biologia e non solo....)
5. Videogiochi
6. Motori di ricerca
7.

... E se Alice fosse un controllore
i villaggi gli stabilimenti da lei controllati
e Bob un truffatore?

Alice sull'isola

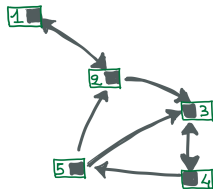


- ▶ Possiamo fare previsioni sull'itinerario di Alice?
- ▶ Quali informazioni abbiamo bisogno?
- ▶ Con che probabilità Alice incontrerà Bob?
E quanto tempo impiegherà (in media)?
- ▶ Dove si troverà Alice dopo aver vagato secondo questo schema per 2, 10, 100 giorni?

L'isola e il grafo associato

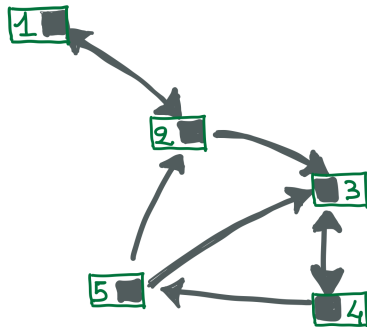


Isola

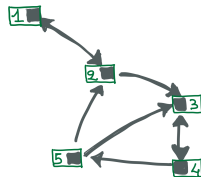


Grafo (nodi e archi)
nessuna probabilità

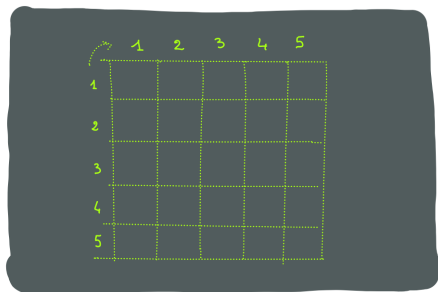
La matrice di transizione M



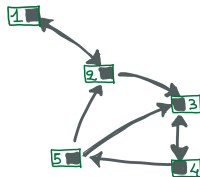
La matrice di transizione M



La matrice di transizione M

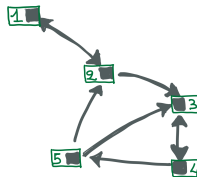


	1	2	3	4	5
1					
2					
3					
4					
5					

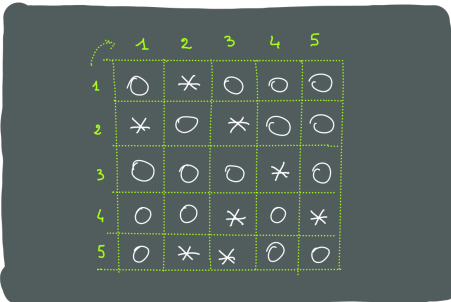


La matrice di transizione M

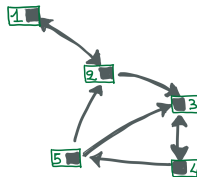
	1	2	3	4	5
1		*			
2	*		*		
3				*	
4			*		*
5		*	*		



La matrice di transizione M

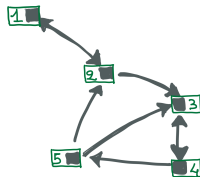


	1	2	3	4	5
1	○	*	○	○	○
2	*	○	*	○	○
3	○	○	○	*	○
4	○	○	*	○	*
5	○	*	*	○	○



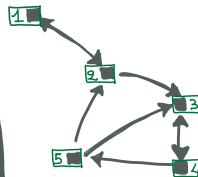
La matrice di transizione M

	1	2	3	4	5
1	○	1	○	○	○
2	*	○	*	○	○
3	○	○	○	*	○
4	○	○	*	○	*
5	○	*	*	○	○



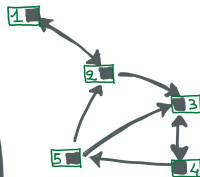
La matrice di transizione M

	1	2	3	4	5
1	0	1	0	0	0
2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	0
3	0	0	0	*	0
4	0	0	*	0	*
5	0	*	*	0	0



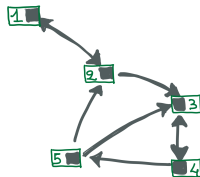
La matrice di transizione M

	1	2	3	4	5
1	○	1	○	○	○
2	$\frac{1}{2}$	○	$\frac{1}{2}$	○	○
3	○	○	○	1	○
4	○	○	$\frac{1}{2}$	○	$\frac{1}{2}$
5	○	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	○	○



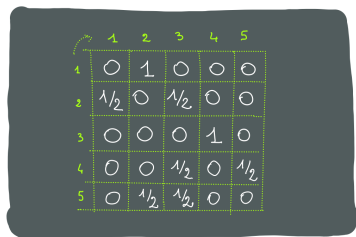
La matrice di transizione M

	1	2	3	4	5
1	○	1	○	○	○
2	1/2	○	1/2	○	○
3	○	○	○	1	○
4	○	○	1/2	○	1/2
5	○	1/2	1/2	○	○

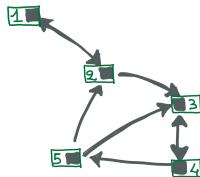


$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di transizione M



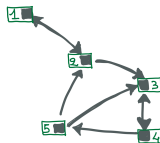
	1	2	3	4	5
1	○	1	○	○	○
2	1/2	○	1/2	○	○
3	○	○	○	1	○
4	○	○	1/2	○	1/2
5	○	1/2	1/2	○	○



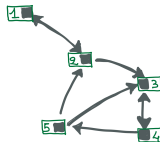
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

... e le probabilità iniziali

1. Comunicazione e periodo
2. Transienti o ricorrenti
3. probabilità di visita o di assorbimento in una posizione
4. tempo medio per la prima visita o l'assorbimento
5. comportamento a lungo termine
6. ... e probabilità invarianti
7.



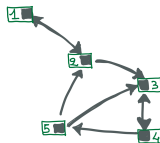
1. Comunicazione e periodo
2. Transienti o ricorrenti
3. probabilità di visita o di assorbimento in una posizione
4. tempo medio per la prima visita o l'assorbimento
5. comportamento a lungo termine
6. ... e probabilità invarianti
7.



Alcune regole:

- 1- *Ricorrenza, transienza e periodo sono “contagiose”
(invarianti per classi)*
- 2- *Le classi finite chiuse sono ricorrenti*

1. Comunicazione e periodo
2. Transienti o ricorrenti
3. probabilità di visita o di assorbimento in una posizione
4. tempo medio per la prima visita o l'assorbimento
5. comportamento a lungo termine
6. ... e probabilità invarianti
7.



Alcune regole:

- 1- *Ricorrenza, transienza e periodo sono “contagiose”
(invarianti per classi)*
- 2- *Le classi finite chiuse sono ricorrenti*

unica classe, periodo 1, tutti ricorrenti

probabilità invarianti

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$$

$$p = pM, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

probabilità invarianti

$$p = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$$

$$p = pM, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

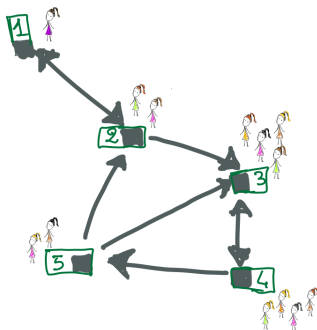
$$\begin{cases} p_1 = \frac{1}{2}p_2 \\ p_2 = p_1 + \frac{1}{2}p_5 \\ p_3 = \frac{1}{2}p_2 + \frac{1}{2}p_4 + \frac{1}{2}p_5 \\ p_4 = p_3 \\ p_5 = \frac{1}{2}p_4 \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1 \end{cases}$$

probabilità invarianti

$$p = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13} \right)$$

probabilità invarianti

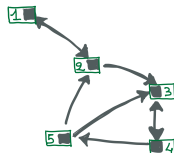
$$p = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13} \right)$$



Dove si trova Alice dopo 2, 10, 100 o 101 giorni?

Dove si trova Alice dopo 2, 10, 100 o 101 giorni?

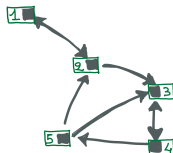
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



Dove si trova Alice dopo 2, 10, 100 o 101 giorni?

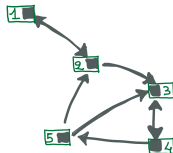
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$



Dove si trova Alice dopo 2, 10, 100 o 101 giorni?

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



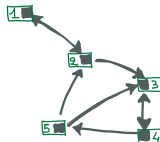
$$M^2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M^{100} = \begin{pmatrix} 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3077 & 0.1538 \\ 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3077 & 0.1538 \\ 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3077 & 0.1538 \\ 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3077 & 0.1538 \\ 0.0769 & 0.1538 & 0.3077 & 0.3077 & 0.1538 \end{pmatrix} \dots = M^{101} = M^{102} = M^{103} \dots$$

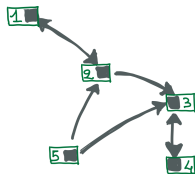
$$p = \left(\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{4}{13}, \frac{4}{13}, \frac{2}{13} \right) = (0.0769, 0.1538, 0.3077, 0.3077, 0.1538)$$

Riassumendo...

1. Comunicazione e periodo **unica classe, periodo 1**
 2. Transienti o **ricorrenti**
 3. probabilità di visita o di assorbimento in una posizione
probabilità di visita =1 per ogni villaggio
 4. tempo medio per la prima visita o l'assorbimento (?)
 5. comportamento a lungo termine
 6. ... e probabilità invarianti (**Viste**)
 7.
- 
- A diagram showing two states, labeled 1 and 2, each represented by a small square icon. State 1 is at the top left, and state 2 is at the bottom right. A curved arrow points from state 1 to state 2, and another curved arrow points from state 2 back to state 1, indicating a transition between the two states.



Altri problemi - 1 - Tolgo un bus



Quali stati (o posizioni) comunicano tra loro?

[Ricorda: due stati comunicano se esiste un cammino dal primo al secondo e viceversa]

La matrice di transizione M ?

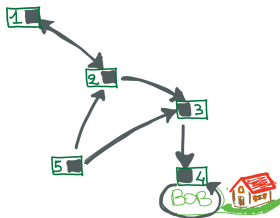
La probabilità invariante?

Le probabilità di visitare una posizione?

A seconda del punto di partenza, sapete dire per quali posizioni $\pi = 1$ e per quali $\pi < 1$?

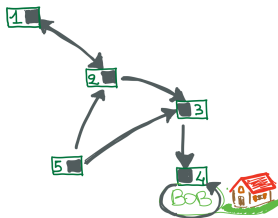
→ Vedi la soluzione alla fine della presentazione

Altri problemi - 2 - Alice si ferma da Bob



... stesse domande di prima....

Altri problemi - 2 - Alice si ferma da Bob



... stesse domande di prima....

→ Vedi la soluzione alla fine della presentazione

3 - Il giocatore - Una catena con infinite posizioni



Ad ogni passo



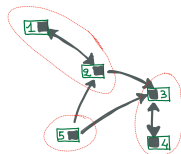
→ Questo caso è molto più difficile!

1 - Tolgo un bus - Traccia per le risposte

Classi di stati comunicanti:

$\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5\}$

infatti, ad esempio, 1 comunica con 2, perché posso passare da uno all'altro, ma non comunica con 3 e 4 perché da 1 si accede a 3 e 4 ma non viceversa, e 1 non comunica con 5 perché da 1 non si accede a 5



La matrice di transizione?

rispetto al primo caso, cambia solo la quarta riga perché da 4 ora si può andare solo verso 3

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La probabilità invariante? $p = (0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$

Si può giustificare con il sistema lineare oppure immaginando di avere due persone che si muovono secondo questo schema, una in 3 ed una in 4...

1 - Tolgo un bus - Traccia per le risposte

Le probabilità di visita?

Diverse considerazioni sulle probabilità, possono essere ottenute dal grafo.

Se parto da 1, visito sicuramente 1 e 2 (perché 1 è il punto di partenza e 2 la posizione successiva); ho una probabilità > 0 di visitare 3 e 4, mentre la visita di 5 è impossibile e quindi ha probabilità 0.

Se parto da 2, ho probabilità 1 di visitare il 2, probabilità > 0 di visitare 1,3,4, probabilità nulla di visitare il 5.

Se parto da 3 o 4, ho probabilità 1 di visitare 3 e 4, e probabilità nulla di visitare le altre posizioni.

Se parto da 5, ho probabilità 1 di visitare il 5 (sempre perché è il punto di partenza), probabilità > 0 di visitare qualsiasi altra posizione.

.... Conoscendo un po' di teoria sulle catene di Markov, posso in realtà affermare senza fare alcun conto che la probabilità di visitare 3 e 4 è 1 partendo da qualsiasi posizione.

Curiosità sulle potenze della matrice M, calcolate con MATLAB

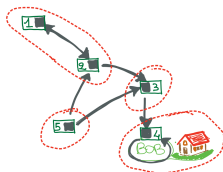
[Notare che l'elemento sulla riga k e colonna j di M^n indica la probabilità, partendo da k, di trovarsi in j dopo n passi; k e j variano da 1 a 5, n è un qualsiasi numero naturale, ad esempio $n=20,21,100,101$]

$$M^{20} = \begin{pmatrix} 0.001 & 0 & 0.999 & 0 & 0 \\ 0 & 0.001 & 0 & 0.999 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.0005 & 0 & 0.4995 & 0.5 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$
$$M^{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0.001 & 0 & 0.999 & 0 \\ 0.0005 & 0 & 0.9995 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 & 0.5 & 0.4995 & 0 \end{pmatrix} \quad M^{101} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

M^{100} e M^{101} sono diverse! Come mai?

2 - Alice si ferma da Bob - Traccia per le risposte

Classi di stati comunicanti:
 $\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$



Matrice di transizione

cambia nuovamente solo la quarta riga perché da 4 ora si può solo restare in 4

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La probabilità invariante? $p = (0, 0, 0, 1, 0)$

Curiosità: $M^{100} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M^{101} = M^{102} \dots$

Per domande, non esitate a contattarmi all'indirizzo raffaella.carbone@unipv.it
(mail con Oggetto "Stage matematica attiva")