Funzionali entropia ed equilibrio di sistemi di molte particelle*

G. Toscani †

Sunto. – *In this lecture, we discuss a number of questions related to entropy functionals and their use in the study of the asymptotic behavior of both kinetic and diffusion equations. Moreover, we introduce and discuss examples of the link between entropy production estimates and the field of functional inequalities.*

1. – Entropia ed equilibrio

1.1. – *Richiami di teoria cinetica.* – Negli anni recenti sono stati introdotti molti modelli matematici atti a decrivere il comportamento di sistemi composti da un alto numero di particelle interagenti. Fra gli altri, sono stati considerati modelli cinetici per l'evoluzione di gas granulari, elettroni in micro-apparecchiature, ioni nel plasma in reattori a fusione, atomi in un condensato di Bose-Einstein, e gas nel rientro dello Shuttle.

Caratteristica comune di questi sistemi è la loro tendenza a convergere nel tempo verso una configurazione di equilibrio. Molto spesso alla base della tendenza all'equilibrio c'è un principio termodinamico: nel tempo, le interazioni fra le particelle portano alla crescita di un funzionale, solitamente chiamato entropia (secondo principio della termodinamica).

Le equazioni cinetiche di evoluzione, di solito utilizzate per la descrizione matematica dei sistemi di molte particelle, si basano sulle interazioni microscopiche (in genere collisioni) fra le molecole in termini di posizione e velocità, fornendo in questo modo una descrizione accurata della realtà. L'equazione di Boltzmann è, senza ombra di dubbio, il modello cinetico più famoso, sia per la grande varietà delle sue applicazioni attuali, sia per ragioni storiche. L. Boltzmann dimostrò per tale modello il suo celebrato teorema H sulla crescita dell'entropia [6].

Nell'equazione di Boltzmann (spazialmente omogenea) [19] l'incognita è una funzione non negativa ed integrabile $f(v,t)$, che rappresenta la densità delle molecole di velocità v al tempo t. La variazione nel tempo della densità f è dovuta alle collisioni tra molecole, ed è descritta dall'equazione integro–differenziale

---

*Conferenza tenuta al XVIII Congresso Unione Matematica Italiana

†Dipartimento di Matematica "F. Casorati", Università di Pavia, via Ferrata 1, I-27100 Pavia, Italy. E-mail: giuseppe.toscani@unipv.it.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \int_{I\!R^3 \times S^2} B\left(\nu, |v-w|\right)\left(f(v^*)f(w^*) - f(v)f(w)\right) dw\, dn. \tag{1.1}$$

Nell'integrale di collisione in (1.1) le coppie (v, w) e (v^*, w^*) rappresentano rispettivamente le velocità post e pre collisionali in una collisione binaria fra due molecole che collidono elasticamente. Esse sono legate dalle relazioni

$$v^* = \frac{1}{2}\left(v + w + |v-w|n\right), \qquad w^* = \frac{1}{2}\left(v + w - |v-w|n\right), \tag{1.2}$$

dove n è un versore della sfera unitaria S^2. Il nucleo $B(\nu, |v-w|)$, $\nu = (v-w)\cdot n/|v-w|$ descrive i dettagli del potenziale di interazione.

L'equazione cinetica (1.1) descrive il rilassamento della densità $f(v,t)$ verso la distribuzione di equilibrio (densità Maxwelliana). La determinazione della velocità di convergenza verso la distribuzione Maxwelliana è un problema fondamentale per lo studio del limite idrodinamico dell'equazione di Boltzmann completa

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \underbrace{v\cdot\nabla_x f}_{Trasporto}\right)(x,v,t) = \frac{1}{\epsilon}\underbrace{Q(f,f)(x,v,t)}_{Rilassamento}. \tag{1.3}$$

Nell'equazione completa la densità $f(x,v,t)$ dipende da posizione x e velocità v. L'evoluzione della densità è ottenuta in questo caso dall'azione congiunta di trasporto libero e rilassamento.

Le proprietà di conservazione dell'equazione di Boltzmann (1.1) si ricavano facilmente utilizzando la forma debole di Maxwell per l'integrale collisionale [5]

$$\langle \phi(v), Q(f,f)(v)\rangle = \frac{1}{4}\int B\left(\nu, |v-w|\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\phi(v) + \phi(w) - \phi(v^*) - \phi(w^*)\right)\,\left(f(v^*)f(w^*) - f(v)f(w)\right)\, dv\, dw\, dn. \tag{1.4}$$

Per collisioni elastiche, descritte dalla (1.2),

$$v^* + w^* = v + w, \qquad (v^*)^2 + (w^*)^2 = v^2 + w^2.$$

In questo caso, la scelta $\phi = 1, v, |v|^2$ implica

$$\langle \phi(v), Q(f,f)(v)\rangle = 0,$$

e questo corrisponde alle conservazioni di massa, quantità di moto ed energia, che risultano essere gli unici *invarianti di collisione*.

1.2. – *Il teorema H di Boltzmann.* – La scelta $\phi(v) = \log f(v)$ nella (1.4) implica $\langle \log f(v), Q(f,f)(v)\rangle \le 0$. Infatti, le proprietà del logaritmo permettono di scrivere l'integrale a destra nella (1.4) come

$$- \langle \log f(v), Q(f,f)(v)\rangle = \frac{1}{4}\int B\left(\nu, |v-w|\right) \cdot$$

$$\cdot \log \frac{f(v^*)f(w^*)}{f(v)f(w)} \left(f(v^*)f(w^*) - f(v)f(w)\right)\, dv\, dw\, dn \ge 0. \tag{1.5}$$

Questa proprietà è alla base del teorema H di Boltzmann. Tenuto infatti conto della proprietà di conservazione della massa ($\langle 1, Q(f,f)(v)\rangle = 0$), è immediato concludere che

$$\frac{d}{dt}\int f(v,t)\log f(v,t)\, dv = \langle 1 + \log f(v), Q(f,f)(v)\rangle \le 0.$$

La funzione $H(f)(t) = \int f(v,t)\log f(v,t)\, dv$ decresce fino a che $\log f(v)$ non appartiene allo spazio degli invarianti di collisione. La condizione di equilibrio

$$\log f(v) = \alpha + \beta\cdot v + \gamma|v|^2, \quad \alpha,\beta,\gamma \text{ costanti}$$

unita alla conservazione di massa, momento ed energia, permette di determinare in modo univoco la distribuzione di equilibrio (Maxwelliano)

$$f_\infty(v) = M_{\rho,u,T}(v) = \frac{\rho}{(2\pi T)^{3/2}} e^{-\frac{(v-u)^2}{2T}}. \tag{1.6}$$

Nella (1.6), ρ, u, T sono i momenti della distribuzione iniziale

$$\rho = \int f_0(v)\, dv, \quad u = \frac{1}{\rho}\int v\, f_0(v)\, dv, \quad T = \frac{1}{3\rho}\int (v-u)^2 f_0(v)\, dv.$$

Storicamente, il Teorema H di Boltzmann è sempre stato considerato come strumento essenziale per determinare la velocità di convergenza (monotona) a zero dell'entropia relativa

$$H(f/M)(t) = H(f)(t) - H(M) = \underbrace{\int f(v,t)\log\frac{f(v,t)}{M(v)}}_{\text{Entropia relativa}} \ge 0.$$

Anche se il teorema H è stato dimostrato nella seconda metà dell'ottocento, nondimeno i risultati matematici rigorosi su questo problema sono stati ottenuti solo in anni relativamente recenti.

Nel 1982 Cercignani congetturò una rata di convergenza esponenziale [18], assumendo che la produzione di entropia fosse limitata dal basso

$$-\frac{dH(f)}{dt} = -\langle \log f, Q(f,f)\rangle \ge \lambda H(f/M), \qquad \lambda > 0.$$

Oggi sappiamo che la congettura di Cercignani è *qualche volta vera e sempre quasi vera* [52]. Carlen e Carvalho per primi [9] hanno ottenuto una versione debole della congettura, dimostrando che

$$-\langle \log f, Q(f,f)\rangle \geq \Psi\left(H(f/M)\right). \tag{1.7}$$

Nella (1.7) $\Psi(\cdot)$ è una funzione non decrescente, e $\Psi(0) = 0$. Una versione migliorata della disuguaglianza di Carlen e Carvalho è stata ottenuta dall'autore, in collaborazione con Villani [49]

$$-\langle \log f, Q(f,f)\rangle \geq H(f/M)^{1+\epsilon}, \qquad \epsilon > 0.$$

Risulta interessante notare che, a prescindere dalle sua applicazioni alla teoria cinetica, la nozione di entropia è stata usata in altri contesti.

Fra le altre, sono di notevole importanza applicazioni alla statistica, seguite all'introduzione dell'*informazione di Fisher* [29], e le applicazioni all'ingegneria tramite il concetto di *informazione* sviluppato da Shannon [45].

Parimenti, risultati importanti si sono avuti nell'ambito della teoria dell'informazione [21]. Fra le altre, ricorderò qui la disuguaglianza di Csiszar-Kullback [22, 36], che lega il concetto di entropia relativa alla distanza L^1 fra densità di probabilità

$$2H(f/g) = 2\int f \log\frac{f}{g} \geq \|f-g\|^2_{L^1}.$$

1.3. – *Metodi di entropia.* – Come brevemente descritto nel precedente paragrafo, Il *teorema H* di Boltzmann fornisce un modo elegante e basato su una solida base fisica per ottenere la convergenza monotona dell'entropia relativa a zero. Le stime (eventuali) sulla *produzione di entropia* (1.5) permettono successivamente di determinare la *velocità di convergenza* (non ottimale) a zero in entropia relativa della soluzione verso l'equilibrio. Per mezzo della *disuguaglianza di Csiszar-Kullback* la velocità di convergenza all'equilibrio in entropia relativa viene infine tradotta in termini di convergenza in L^1.

In anni recenti si è pensato di applicare varianti quantitative del meccanismo di crescita dell'entropia per lo studio della convergenza all'equilibrio di sistemi di molte particelle descritti da equazioni cinetiche diverse dall'equazione di Boltzmann.

Il metodo consiste nell'identificare lo stato di equilibrio e il corrispondente funzionale entropia, e successivamente nello studiare la produzione di entropia, cercando di ottenere una relazione fra la stessa e l'entropia relativa. Questo approccio è basato su una chiara base fisica, e si è dimostrato robusto e flessibile. Descriviamo brevemente di seguito i punti principali di tale metodo.

Passo 1: Identificare lo stato di equilibrio e il funzionale entropia (Funzionale di Lyapunov) E associato all'equazione. Una volta identificato lo stato di equilibrio φ_∞, la derivazione del funzionale entropia è standard [48].

Passo 2: Invece di dimostrare direttamente che $f(t)$ converge a f_∞, studiare $E(f(t))$. Dato il funzionale E che assume il suo massimo all'equilibrio f_∞, la discrepanza fra f e l'equilibrio è in questo approccio misurato da

$$E[f/f_\infty] = \underbrace{E(f_\infty) - E(f)}_{\textit{Entropia relativa}}.$$

Passo 3: Studiare la funzione produzione di entropia, cioè la derivata temporale dell'entropia $E(f(t))$

$$P(f(t)) = \frac{d}{dt}E(f(t)).$$

Nel tentativo di implementare i principi generali, il legame tra entropia relativa e produzione di entropia può risultare in una *disuguaglianza entropia-produzione di entropia.* Questa non è altro che una disuguaglianza funzionale del tipo

$$P(f) \geq \Theta\left(E[f/f_\infty]\right),$$

dove $H \to \Theta(H)$ è una funzione continua, con $\Theta(0) = 0$, strettamente positiva se $H > 0$. Nei casi in cui la produzione di entropia controlla l'entropia relativa (tramite la disuguaglianza entropia-produzione di entropia) il problema dell'andamento all'equilibrio ha una soluzione immediata. Infatti la disuguaglianza

$$-\frac{d}{dt}E[f/f_\infty] \geq \Theta\left(E[f/f_\infty]\right),$$

associata alle succitate proprietà della funzione Θ, implica che $E[f(t)/f_\infty]$ converga a 0 per $t \to \infty$.

Ulteriori informazioni sulla crescita della funzione Θ forniscono infine una velocità di convergenza esplicita. Per esempio, $\Theta(H) = \lambda H$ implica convergenza esponenziale all'equilibrio. $\Theta(H) = \nu H^{1+\alpha}$ implica convergenza polinomiale (decadimento almeno come $t^{-1/\alpha}$).

2. – Entropia e disuguaglianze funzionali

2.1. – *Il modello di Bhatnagar-Gross-Krook* . – Al fine di illustrare in modo chiaro il metodo di entropia descritto nella Sezione precedente, ci baseremo su due esempi, che risultano particolarmente significativi e facilmente trattabili, in quanto descritti da operatori lineari.

Il modello di Bhatnagar-Gross-Krook (modello BGK) [7] è una versione semplificata dell'equazione di Boltzmann, in cui l'operatore di collisione contiene esplicitamente l'equilibrio Maxwelliano

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\right)(x, v, t) = \frac{1}{\epsilon}\ \underbrace{\left(M^f - f\right)}_{\textit{Operatore BGK}}\ (x, v, t). \tag{2.8}$$

Nell'equazione (2.8) $M^f(x, v, t)$ è la soluzione di equilibrio (1.6) con gli stessi momenti di $f(x, v, t)$.

Denotiamo $1/\epsilon = \sigma$. L'equazione lineare di rilassamento è la sequente

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \sigma \left(M^f - f \right)(v,t). \tag{2.9}$$

Tenuto conto delle conservazioni di massa, momento ed energia, la Maxwelliana M^f (che dipende da f solo tramite i momenti) coincide con la Maxwelliana M^{f_0}. Pertanto l'equazione (2.9) si può scrivere in modo equivalente come

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \sigma \left(M^{f_0}(v) - f(v,t) \right). \tag{2.10}$$

La soluzione esatta della (2.10) è una combinazione convessa del dato iniziale e della soluzione di equilibrio

$$f(v,t) = f_0(v)e^{-\sigma t} + M^{f_0}(v)\left(1 - e^{-\sigma t}\right).$$

Pertanto

$$\|f(t) - M^{f_0}\|_{L^1} = e^{-\sigma t}\|f_0 - M^{f_0}\|_{L^1},$$

da cui la convergenza esponenziale della soluzione all'equilibrio con velocità σ.

Proviamo a ritrovare lo stesso risultato per mezzo del funzionale entropia. Consideriamo a questo proposito il funzionale H di Boltzmann

$$H(f) = \int f \log f \, dv.$$

Per il modello BGK (2.9) la produzione di entropia vale

$$I(f) = -\int \log f \, Q(f) \, dv = -\sigma \int (M^f - f) \log f \, dv.$$

Ricordando la (1.6), $\log M^f$ risulta essere una combinazione degli invarianti di collisione, (cioè massa, momento ed energia),

$$\int f \log M^f \, dv = \int M^f \log M^f \, dv,$$

e questo implica

$$\int \log M^f (f - M^f) \, dv = 0.$$

Pertanto, la produzione di entropia si può anche scrivere come

$$\begin{aligned} I(f(t)) &= \sigma \int \log f(t) \left(f(t) - M^{f(t)} \right) dv \\ &= \sigma \int \log \frac{f(t)}{M^{f(t)}} \left(f(t) - M^{f(t)} \right) dv. \end{aligned}$$

Grazie alla disuguaglianza di Jensen,

$$H(M^f/f) = \int M^f \log \frac{M^f}{f}\, dv \geq 0.$$

Ne deriva che la produzione di entropia limita da sopra l'entropia relativa

$$I(f)(t) \geq \sigma \int f(t) \log \frac{f(t)}{M^{f(t)}}\, dv = \sigma H\left(f(t)/M^{f(t)}\right).$$

Infine

$$\frac{dH(f(t)}{dt} = \frac{d}{dt} H\left(f(t)/M^{f(t)}\right) \leq -\sigma H\left(f(t)/M^{f(t)}\right).$$

Per l'entropia relativa si ottiene pertanto la disuguaglianza

$$H\left(f(t)/M^{f_0}\right) \leq H\left(f_0/M^{f_0}\right) e^{-\sigma t},$$

che comporta la convergenza esponenziale in entropia relativa alla velocità σ. Utilizzando la disuguaglianza di Csiszar-Kullback

$$\|f(t) - M^{f_0}\|_{L^1}^2 \leq 2H\left(f(t)/M^{f_0}\right) e^{-\sigma t},$$

otteniamo convergenza in L^1 alla velocità $\sigma/2$.

Questo semplice esempio chiarisce le potenzialità dell'approccio alla convergenza all'equilibrio per mezzo dell'entropia relativa, e il fatto che, in generale, lo stesso non permetta di ricavare la velocità ottimale di convergenza in L^1 (in questo caso la convergenza esponenziale in L^1 passa da una velocità σ a $\sigma/2$).

2.2. – *Il trasporto di radiazione.* – Il trasporto di radiazione è un modello cinetico utilizzato per problemi di astrofisica [20]

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \cdot \nabla_x f\right)(x,v,t) = \underbrace{\sigma\left(\int_\Omega f(x,w,t)\, dw - \mu(\Omega) f(x,v,t)\right)}_{\textit{Operatore di radiazione}}.$$

La variabile $v \in \Omega$, sottoinsieme convesso di misura finita $\mu(\Omega)$. L'equazione di rilassamento è anche in questo caso lineare

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \sigma\left(\int_\Omega f(w,t)\, dw - \mu(\Omega) f(v,t)\right). \tag{2.11}$$

Poichè la massa è conservata

$$\int_\Omega f(w,t)\, dw = \int_\Omega f_0(w)\, dw,$$

l'equazione di rilassamento (2.11) può essere scritta in modo equivalente come

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \sigma \left(\int_\Omega f_0(w)\, dw - \mu(\Omega) f(v,t) \right). \tag{2.12}$$

Utilizzando la (2.12), è immediato ricavare la soluzione stazionaria, che risulta essere l'unica funzione costante in Ω di massa uguale a quella della distribuzione iniziale

$$f_\infty(v) = \frac{1}{\mu(\Omega)} \int_\Omega f_0(w)\, dw.$$

Data la funzione Φ convessa e *regolare*, definiamo il funzionale di Lyapunov

$$H_\Phi(f) = \int_\Omega \Phi(f(v))\, dv.$$

Per il calcolo della derivata temporale di H_Φ utilizziamo l'equazione (2.11). Si ottiene

$$\frac{dH_\phi(f(t))}{dt} = \int_\Omega \Phi'(f(v,t)) \frac{\partial f(v,t)}{\partial t}\, dv =$$

$$\int_\Omega \Phi'(f(v,t)) \left[\int_\Omega f(w,t)\, dw - \mu(\Omega) f(v,t) \right] dv =$$

$$\int_\Omega dw \int_\Omega dv\ \Phi'(f(v,t))\ [f(w,t) - f(v,t)] = -I_\Phi(f(t)).$$

Scambiando le variabili v e w, I_Φ si scrive in modo equivalente come

$$I_\Phi(f(t)) = \int_\Omega dw \int_\Omega dv\ \Phi'(f(v,t))\ [f(v,t) - f(w,t)] =$$

$$\int_\Omega dw \int_\Omega dv\ \Phi'(f(w,t))\ [f(w,t) - f(v,t)].$$

Utilizzando entrambe le forme di I_Φ, si ottiene finalmente

$$I_\Phi(f(t)) = \frac{1}{2} \int_\Omega dw \int_\Omega dv\ \ [\Phi'(f(v,t)) - \Phi(f(w,t))] \cdot$$

$$\cdot [f(v,t) - f(w,t)] \geq 0.$$

Infatti, la convessità di Φ implica che $\Phi'(\cdot)$ è crescente. Inoltre $I_\Phi(f(t)) = 0$ se e solo se $f(v,t)$ è costante su Ω.

Dal momento che la produzione di entropia è non negativa,

$$H_\Phi(f(t)) \geq H_\Phi(f_\infty).$$

In particolare

$$\int_\Omega \Phi(f_0(v))\,dv \geq \int_\Omega \Phi(f_\infty(v))\,dv = \int_\Omega \Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f_0(w)\,dw\right)\,dv.$$

Poichè $f_\infty(v)$ è costante su Ω, e $f_0(v)$ arbitrario, se Φ è convessa, abbiamo dimostrato che

$$\underbrace{\Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f_0(w)\,dw\right) \leq \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \Phi(f_0(v))\,dv\,.}_{Disuguaglianza\ di\ Jensen}$$

L'applicazione del metodo di entropia all'equazione di rilassamento per il trasporto di radiazione [30], ci fornisce pertanto un modo alternativo e fisicamente significativo per ottenere la disuguaglianza di Jensen . Inoltre, utilizzando l'equazione

$$\frac{dH_\phi(f(t))}{dt} = -I_\Phi(f(t)),$$

otteniamo

$$\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega \Phi(f_0(v))\,dv = \Phi\left(\frac{1}{\mu(\Omega)}\int_\Omega f_0(w)\,dw\right) + \frac{1}{\mu(\Omega)}\int_0^\infty I(\Phi(f(s))\,ds.$$

Di conseguenza, in aggiunta alla disuguaglianza, utilizzando la soluzione dell'equazione del trasporto radiativo possiamo trovare il resto nella disuguaglianza di Jensen. Si osservi che, per quanto dimostrato, la disuguaglianza è saturata solo in corrispondenza alle funzioni costanti.

2.3. – *Fokker-Planck e disuguaglianza logaritmica di Sobolev.* – I due semplici esempi della precedente Sezione, chiariscono sia le potenzialità del metodo di entropia nella deduzione della velocità di convergenza all'equilibrio (modello BGK), sia le potenzialità dello stesso metodo nell'ottenere disuguaglianze funzionali (trasporto di radiazione). In questa sezione ci occuperemo brevemente di un ulteriore modello cinetico lineare, noto come equazione di Fokker-Planck. L'equazione (cinetica) di Fokker-Planck [44], risultante dall'azione combinata di un operatore di diffusione lineare e da un operatore di confinamento

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sigma\Delta f + \mathrm{div}(vf), \qquad (x \in I\!R^n, t > 0)$$

descrive il rilassamento all'equilibrio Maxwelliano (normalizzato)

$$f_\infty(v) = M_{1,0,\sigma}(v) = \frac{1}{(2\pi\sigma)^{3/2}}e^{-\frac{v^2}{2\sigma}}.$$

Per questo modello si puo definire un'intera famiglia di funzionali entropia relativa

$$H_\Phi(f|f_\infty) = \int \Phi(f|f_\infty)f_\infty,$$

Gli estremi di tale famiglia sono $\Phi_m(h) = h \log h - h + 1$ e $\Phi_M(h) = (h-1)^2/2$. Per ognuna di queste entropie, lo studio dell'evoluzione temporale

$$\frac{dH_\Phi(f|f_\infty)}{dt} = -I_\Phi(f|f_\infty),$$

combinato con lo studio dell'evoluzione della produzione di entropia

$$\frac{dI_\Phi(f|f_\infty)}{dt} = -\lambda I_\Phi(f|f_\infty) - R_\Phi(f), \qquad R_\Phi(f) \geq 0,$$

fornisce una dimostrazione nuova ed interessante di disuguaglianze di tipo Sobolev logaritmico [1]

$$H_\Phi(f|f_\infty) \leq \lambda I_\Phi(f|f_\infty).$$

Le disuguaglianze ottenute sono tanto più forti quanto più la non linearità è debole. La più forte corrisponde alla non linearità $f \log f$, ed è nota come disuguaglianza logaritmica di Sobolev [32]

$$H(f) + \left(n + \frac{n}{2}\log 2\pi\sigma\right) \leq \frac{\sigma}{2}L(f).$$

Nella disuguaglianza $H(f) = \int f \log f$, mentre $L(f)$ è l'informazione di Fisher

$$L(f) = 4\int |\nabla f^{1/2}|^2 = \int |\nabla \log f|^2 f.$$

Questi risultati chiariscono il forte legame esistente fra l'equazione di Fokker-Planck e il campo delle disuguaglianze differenziali [41].

2.4. – *Equazioni di diffusione non lineari.* – Il metodo di entropia si è dimostrato particolarmente efficace nello studio della convergenza verso la soluzione di similarità della soluzione delle equazioni di diffusione non lineari. L'equazione di diffusione $(m > 1)$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u^m, \qquad (x \in I\!R^n, t > 0)$$

descrive l'evoluzione della densità di un gas in un mezzo poroso. Parecchi risultati (a partire dai primi anni settanta [40]) hanno reso evidente che dopo un transitorio, per tempi lunghi la soluzione si avvicina alla soluzione di similarità (soluzione di Barenblatt)

$$B(x,t) = t^{-kn}\left(C - \frac{(m-1)k}{2m}|x|^2 t^{-2k}\right)_+^{\frac{1}{m-1}} \tag{2.13}$$

Nella (2.13) $k = (n(m-1)+2)^{-1}$ e $C > 0$ è fissato dalla conservazione della massa. Risulta di notevole interesse determinare la velocità ottimale di questa convergenza (in norma L^1). Grazie al cambio di variabili

$$u(x,t) = \alpha(t)^{-n} f\left(\alpha(t)^{-1}x, \tau(t)\right),$$

$$\alpha(t) = (kt + c_0)^{1/k}, \qquad \tau(t) = \log \alpha(t),$$

si verifica che la nuova densità $f(v, \tau)$, con $v = \alpha(t)^{-1}x$, soddisfa l'equazione di tipo Fokker-Planck (non lineare)

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = \Delta f^m + \mathrm{div}(vf). \qquad (v \in I\!R^n, \tau > 0) \tag{2.14}$$

La soluzione stazionaria della (2.14) è

$$f_\infty(v) = \left(C - \frac{m-1}{2m} v^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Il modo standard presente in letteratura è quello di dimostrare, tramite raffinate tecniche di analisi funzionale, la convergenza della soluzione $u(x, t)$ verso la soluzione di Barenblatt (dipendente dal tempo). Un modo alternativo è quello di studiare il rilassamento della soluzione $f(v, \tau)$ dell'equazione cinetica verso la soluzione stazionaria. In questo secondo caso c'è la possibilità di studiare il decadimento dell'entropia

$$H(f) = \int_{I\!R^n} \left(|v|^2 f(v) + \frac{2}{m-1} f^m(v) \right) dv.$$

Vale infatti, se $\int f = \int f_\infty$,

$$H(f) \geq H(f_\infty), \qquad f_\infty(v) = \left(C - \frac{m-1}{2m} v^2 \right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Il secondo metodo applicato è stato utilizzato dall'autore con Carrillo in [14]. La stessa idea è stata utilizzata in modo indipendente da Otto in [43]. Se il dato iniziale soddisfa la condizione sui momenti $\int |v|^{2+\delta} f_0(v) < \infty$ per qualche $\delta > 0$, la soluzione decade esponenzialmente in entropia relativa verso la soluzione stazionaria.

$$H(f(\tau)|f_\infty) \leq H(f_0|f_\infty) e^{-2\tau}.$$

L'uso della disuguaglianza di Csiszar-Kullback, e il ritorno alle variabili originali permette di ottenere il decadimento in L_1 verso la soluzione di Barenblatt

$$\|u(x, t) - B(x, t)\|_{L_1(I\!R^n)} \leq C t^{-\alpha(n,m)},$$

dove la costante $\alpha(n, m)$ può essere determinata in modo esplicito.

3. – Riferimenti bibliografici

In aggiunta ai lavori di Fisher [29] e Shannon [45] già citati alla fine della Sezione 1.2, altre applicazioni del concetto di entropia sono state introdotte da Lax [38] per sistemi iperbolici di leggi di conservazione, e da DiPerna [27] nell'ambito della compattezza per compensazione. Inoltre, il famoso teorema di DiPerna e Lions [28] sull'esistenza globale di soluzioni rinormalizzate dell'equazione di Boltzmann è basato sull'uso dell'entropia di Boltzmann. Altri, forse non molto noti esempi di utilizzo dell'entropia, sono contenuti nel lavoro di Nash [42] sulla regolarità della soluzione di certe equazioni di diffusione, e nel lavoro di Bernis e Friedman [4], dove un'opportuna entropia permette di dimostrare la positività di un'equazione di diffusione del quarto ordine. Infine, è da sottolineare il contributo di Stam [46], che ha evidenziato il legame fra i concetti di informazione di Shannon e Fisher.

Per quanto riguarda il teorema H di Boltzmann e le sue conseguenze per il comportamento asintotico della soluzione, il primo risultato rigoroso è dovuto a Desvillettes [23]. Risultati più forti nel caso dell'evoluzione della densità in un gas diluito (operatore di Landau [37]) sono stati ottenuti da Desvillettes e Villani [24, 25]. Tali risultati sono stati successivamente estesi all'operatore di Boltzmann in [26]. Il caso del decadimento all'equilibrio per l'equazione di Boltzmann e Landau, per interazioni soft e kernel regolari è stato trattato in [51]. Il problema del decadimento all'equilibrio per l'equazione di Boltzmann per molecole Maxwelliane e l'unicità della soluzione nel caso di interazioni a lungo raggio è stato infine trattato in [50], mediante l'utilizzo di un nuovo funzionale di Lyapunov.

Per quanto riguarda i risultati della Sezione 2.3, in aggiunta al già citato lavoro [1], un analisi dettagliata della produzione di entropia per equazioni di Fokker-Planck lineari è stata fatta in [47, 13]. Le implicazioni della convergenza in entropia relativa sono state studiate in [2]. Inoltre, le connessioni fra l'equazione di Fokker-Planck e il campo delle disuguaglianze differenziali è stato analizzato in [41], fornendo una nuova interpretazione dei noti risultati di Bakry e Emery [3].

La più importante applicazione del metodo di entropia è forse quella legata alle equazioni di diffusione non lineari, brevemente trattata nella Sezione 2.4. In particolare, la convergenza della soluzione dell'equazione di diffusione dei mezzi porosi verso la soluzione di similarità , problema famoso i cui primi risultati risalgono agli anni settanta [40], è stata trattata in [14, 43]. Generalizzazioni di questa idea hanno condotto a risultati per equazioni di Fokker-Planck con diffusione non lineare e confinamento di tipo generale [10, 39, 11, 33]. Nel campo delle equazioni di diffusione non lineari, il metodo di entropia è stato ulteriormente utilizzato per operatori di diffusione diversi da potenza in [16, 17]. Estensioni a potenziali di confinamento atti a modellare gas granulari si possono trovare in [12].

Recentemente, i metodi di entropia sono stati utilizzati per trovare la velocità di convergenza verso la soluzione di similarità di alcune equazioni di diffusione non lineari del quarto ordine. Principalmente, sono state trattate due equazioni. La prima è un'equazione parabolica del quarto ordine di interesse nello studio dei semiconduttori [35, 8, 31]. La seconda è l'equazione dei film sottili, atta a modellare l'allargamento di una goccia su una superficie per azione della tensione del supporto [15]. Infine, un modo sistematico di costruire entropie per equazioni di diffusione è stato recentemente studiato in [34].

4. – Conclusioni

In questa conferenza si è sottolineata l'importanza dello studio dell'evoluzione dell'entropia per trovare risultati qualitativi e quantitativi sul rilassamento all'equilibrio sia delle equazioni cinetiche che delle equazioni di diffusione. Questo metodo ha il vantaggio di risultare sia robusto che duttile, particolarmente adatto allo studio delle equazioni di diffusione non lineari del secondo ordine. Sono stati inoltre evidenziati gli stretti collegamenti dei metodi di entropia con le disuguaglianze differenziali di tipo Sobolev logaritmiche.

Molto è stato fatto, molto rimane da fare. La speranza è che questa semplice idea fisica possa essere ancora utilizzata in futuro per nuovi risultati qualitativi per equazioni cinetiche, e più in generale, per equazioni a derivate parziali.

REFERENCES

[1] A. Arnold, P. A. Markowich, G. Toscani e A. Unterreiter, On Convex Sobolev Inequalities and the Rate of Convergence to Equilibrium for Fokker-Planck Type Equations. *Comm. Partial Differential Equations*, **26** (2001), 43–100.

[2] A. Arnold, P.A. Markowich, G. Toscani and A. Unterreiter, On Generalized Csiszar-Kullback Inequalities. *Monatsh. Math.* **131** (2000), 235–253.

[3] D. Bakry e M. Emery, Diffusions hypercontractives. In *Sèm. Proba.* **XIX**, **1123** Lecture Notes in Math. Springer, 1985, 177–206.

[4] F. Bernis, A. Friedman, Higher order nonlinear degenerate parabolic equations, *J. Diff. Eqns.* **83**, (1990) 179–206 .

[5] A.V. Bobylev, The theory of the nonlinear spatially uniform Boltzmann equation for Maxwell molecules. *Mathematical physics reviews*, **7**, (1988) 111–233.

[6] L. Boltzmann, Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen. *Sitz. der Akademie der Wissenschaften* **66**, (1872), 275–370 ; *Lectures on Gas Theory.* University of California Press, Berkeley, 1964. Translated by S.G. Brush. Reprint of the 1896–1898 Edition. Reprinted by Dover Publications, 1995.

[7] P.L. Bhatnagar, E.P. Gross, M. Krook, A model for collision processes in gases. I. Small amplitude processes in charged and neutral one-component systems, *Phys. Rev.*, **94**, (1954) 511-525.

[8] M.J. Cáceres, J.A. Carrillo, G. Toscani, Long-time behavior for a nonlinear fourth-order parabolic equation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **357** (2005), 1161–1175.

[9] E.A. Carlen e M. Carvalho, Strict entropy production bounds and stability of the rate of convergence to equilibrium for the Boltzmann equation. *J. Statist. Phys.* **67** (1992), 575-608.

[10] J.A. Carrillo, A. Juengel, P. Markowich, G. Toscani e A. Unterreiter: Entropy production methods for degenerate parabolic problems and generalized Sobolev inequalities. *Monatsh.Math.* **133** (2001) 1-82.

[11] J.A. Carrillo, C. Lederman, P.A. Markowich e G. Toscani, Poincarè Inequalities for Linearizations of Very Fast Diffusion Equations., *Nonlinearity* **15** (2001), 1–16.

[12] J.A. Carrillo, R.J. McCann, C. Villani, Kinetic equilibration rates for granular media and related equations: entropy dissipation and mass transportation estimates, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **19**, (2003) 1–48.

[13] J.A. Carrillo e G.Toscani, Exponential convergence toward equilibrium for homogeneous Fokker-Planck-type equations. *Mathem. Methods Appl. Sciences* **21** (1998) 1269-1286.

[14] J.A. Carrillo e G. Toscani, Asymptotic L^1-decay of the porous medium equation to self-similarity. *Indiana Univ. Math. J.* **46** (2000), 113-142.

[15] J.A. Carrillo e G. Toscani, Large–time asymptotics for strong solutions of the thin film equation. *Commun. Math. Phys.* **225** (2002), 113–142.

[16] J.A. Carrillo, J.L. Vázquez, Fine asymptotics for fast diffusion equations. *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), 1023–1056.

[17] J.A. Carrillo, J.L. Vázquez, Asymptotic complexity in filtration equations. *J. Evol. Equ.* **7** (2007), 471–495.

[18] C. Cercignani, H-theorem and trend to equilibrium in the kinetic theory of gases. *Arch. Mech.* **34** (1982), 231-241.

[19] C. Cercignani, *Mathematical methods in kinetic theory.* Second edition. Plenum Press, New York, 1990.

[20] S. Cherasekhar, *Principles of Stellar Dynamics.* Courier Dover Publ. New York, 1942

[21] T.M. Cover e J.A. Thomas, *Elements of Information Theory.* J. Wiley & Sons Inc., New York, 1991.

[22] Csiszar I.: Information-type measures of difference of probability distributions and indirect observations. *Stud. Sci. Math. Hung.*, **2**, (1967) 299–318.

[23] L. Desvillettes, Entropy production rate and convergence in kinetic equations. *Comm. Math. Phys.* **26** (1989), 687-702.

[24] L. Desvillettes e C. Villani, On the Spatially Homogeneous Landau Equation for Hard Potentials. Part II: H-Theorem and Applications. *Comm. Partial Differential Equations* **25**, n. 1-2, (2000), 261–298.

[25] L. Desvillettes e C. Villani, On the trend to global equilibrium in spatially inhomogeneous entropy-dissipating systems: the linear Fokker-Planck equation. *Comm. Pure Appl. Math.* **54** (2001) 1–42.

[26] L. Desvillettes e C. Villani, On the trend to global equilibrium for spatially inhomogeneous kinetic systems: the Boltzmann equation. *Invent. Math.* **159** (2005) 245–316.

[27] R.J. DiPerna, Compensated compactness and general systems of conservation laws. *Trans. Amer. Math. Soc.* **292** (1985), 383–420.

[28] R.J. DiPerna e P.L.Lions, On the Cauchy problem for the Boltzmann equation: Global existence and weak stability. *Ann. of Math. (2)* **130** (1989), 312-366.

[29] R. Fisher, Theory of statistical estimation. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **22** (1925), 700-725.

[30] E. Gabetta, P.A. Markowich, A. Unterreiter: A note on the entropy production of the radiative transfer equation. *Appl. Math. Lett.* **12** (1999), 111–116.

[31] U. Gianazza, G. Savarè , G. Toscani, The Wasserstein gradient flow of the Fisher information and the Quantum Drift-Diffusion equation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* (in press)

[32] L. Gross, Logarithmic Sobolev inequalities. *Amer. J. of Math.* **97** (1975),1061–1083.

[33] A. Juengel, P. Markowich e G.Toscani, Decay rates for solutions of degenerate parabolic systems. *Electron. J. Diff. Eqs.* Conf. **06** (2001), 189-202.

[34] A. Juengel, D. Matthes, An algorithmic construction of entropies in higher-order nonlinear PDEs. *Nonlinearity* **19** (2006) 633-659.

[35] A. Juengel e G. Toscani, Exponential decay in time of solutions to a nonlinear fourth-order parabolic equation. *Z. Angew. Math. Phys.* **54**, (2003) 377-386.

[36] Kullback S.: A lower bound for discrimination information in terms of variation. *IEEE Trans. Inf. The.*, **4** (1967) 126–127.

[37] L. Landau, Die kinetische Gleichung für den Fall Coulombscher Wechselwirkung. *Phys. Z. Sovjet.* **10** (1936), 154-.

[38] P.D. Lax, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics*, **11**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., (1973), v+48.

[39] C. Lederman e P.A. Markowich, On fast-diffusion equations with infinite equilibrium entropy and finite equilibrium mass. *Comm. Partial Differential Equations* **28** (2003), 301–332.

[40] S. Kamenomostskaya, The asymptotic behavior of the solution of the filtration equation. *Israel J. Math.* **14** (1973), 76–87.

[41] P.A. Markowich e C. Villani, On the trend to equilibrium for the Fokker-Planck equation: an interplay between physics and functional analysis. *Mat. Contemp.* **19** (2000), 1–29.

[42] J. Nash, Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations. *Amer. J. Math.* **80** (1958), 931-954.

[43] F. Otto, The geometry of dissipative evolution equations: the porous medium equation *Comm. Partial Diff. Eq.* **26**, (2001) 101–174.

[44] H. Risken, *The Fokker-Planck equation. Methods of solution e applications.* Second edition. Springer Series in Synergetics, **18** Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[45] C.E. Shannon, *Collected papers.* Edited by N. J. A. Sloane e Aaron D. Wyner. IEEE Press, New York, 1993.

[46] A. Stam, Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon. *Inform. Control* **2** (1959), 101–112.

[47] G. Toscani, Sur l'inègalitè logarithmique de Sobolev. *C.R. Acad. Sc. Paris* **324** (1997), 689–694.

[48] G.Toscani, Remarks on entropy and equilibrium states *Appl. Math. Letters*, **12** (1999) 19-25.

[49] G. Toscani e C. Villani, Sharp entropy production bounds and explicit rate of trend to equilibrium for the spatially homogeneous Boltzmann equation. *Commun. Math. Phys.* **203**, (1999) 667-706.

[50] G. Toscani e C. Villani, Probability metrics and uniqueness of the solution to the Boltzmann equation for a Maxwell gas. *J. Statist. Phys.* **94**, (1999) 619-637.

[51] G. Toscani e C. Villani, On the trend to equilibrium for some dissipative systems with slowing increasing a priori bounds. *J. Statist. Phys.* **98** (2000) 1279–1309.

[52] C. Villani Cercignani's conjecture is sometimes true and always almost true. *Commun. Math. Phys.* 234 (2003), 455-490.