COMPLEMENTI DI ANALISI MATEMATICA DI BASE

(Laurea triennale in Fisica)

Prova scritta del 7 Febbraio 2005

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Considerata la successione di funzioni* $\{f_n\}$ *da* $[0, +\infty[$ *in* $\mathbb{R}$

$$f_n(x) := n^2 \sqrt{x}\, \exp(-nx),$$

a) mostrare che $\forall x \geq 0$ *esiste il*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) := f(x)$$

e calcolare $f(x)$*;*

b) verificare che la convergenza di $\{f_n\}$ *ad* f non *è uniforme su* $[0, +\infty[$*, mentre lo è su* $[1, +\infty[$*;*

c) determinare se vale o no l'uguaglianza

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Sia* Ω *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^2$ *non vuoto, misurabile (secondo Lebesgue) e di misura finita. Mostrare che, per ogni funzione* f *sommabile in* Ω *e per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*,*

a) la funzione $x \mapsto g_\lambda(x) := (f(x) - \lambda)^{1/3}$ *è sommabile in* Ω*;*

b) $\displaystyle\lim_{\lambda\to-\infty} \int_\Omega g_\lambda(x)\, \mathrm{d}m = +\infty; \qquad \lim_{\lambda\to+\infty} \int_\Omega g_\lambda(x)\, \mathrm{d}m = -\infty.$

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Calcolare l'integrale curvilineo* $\int_\gamma \omega$*, dove:*

$$\omega := (e^y + y\, e^x + 2y)\mathrm{d}x + (x\, e^y + e^x - 2y)\mathrm{d}y$$

e γ *è l'ellisse di equazione* $x^2 + 9y^2 = 4$*, percorsa una volta in senso orario.*

[Suggerimento: si determini una forma differenziale $\widetilde{\omega}$ che ha un'espressione molto più semplice di quella di ω, ma tale che $\int_\gamma \widetilde{\omega} = \int_\gamma \omega$].

Soluzione

$\boxed{\mathbf{1}}$ a) Si ha $f_n(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, quindi $f(0) = 0$. Per ogni $x > 0$ fissato, è evidente che $f_n(x) = \sqrt{x}\,\dfrac{n^2}{\exp(nx)}$ tende a 0 per $n \to +\infty$ ($\exp(nx)$ ha ordine di infinito maggiore di r $\forall r \in \mathbb{R}$). Quindi f è la funzione identicamente nulla su $[0, +\infty[$.

b) Per dimostrare che la convergenza di f_n ad f non è uniforme su $[0, +\infty[$, si osservi che f_n è ≥ 0, $f_n(0) = 0$, e $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$; quindi f_n (che non è identicamente nulla) ha massimo positivo in $]0, +\infty[$. Dato che

$$f_n'(x) = n^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - n\sqrt{x} \right) \exp(-nx)$$

si annulla se e solo se $x = 1/(2n)$, tale punto è di massimo per f_n, ed il valore del massimo è $f_n(1/(2n)) = \frac{1}{2} n^{3/2}\, e^{-1/2}$. Quindi non solo non è vero che per $n \to +\infty$ si ha $\sup_{x\geq 0} f_n(x) \to 0$, ma anzi $\sup_{x\geq 0} f_n(x) \to +\infty$. Invece, per $x \geq 1$ la funzione f_n è *decrescente*, quindi $\sup_{x\geq 1} f_n(x) = f_n(1) = n^2\, e^{-n}$ tende a 0 per $n \to +\infty$, dunque la convergenza è uniforme.

c) L'uguaglianza è *falsa*: più precisamente, il limite a primo membro vale $+\infty$. Infatti, dato che $x \mapsto e^{-nx}$ è decrescente, si ha che

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x > n^2 \int_0^{1/n} x^{1/2}\, e^{-nx}\,\mathrm{d}x > \frac{n^2}{e} \int_0^{1/n} x^{1/2}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3e}\, n^{1/2}.$$

$\boxed{2}$ a) La funzione g_λ è misurabile in Ω, perché è la composizione della funzione misurabile f e della funzione continua $t \mapsto (t-\lambda)^{1/3}$. Inoltre, per ogni $t \in \mathbb{R}$ si ha $|t|^{1/3} < 1 + |t|$ (se $|t| < 1$ si ha $|t|^{1/3} < 1 \leq 1 + |t|$, e se $|t| \geq 1$ si ha $|t|^{1/3} \leq |t| < 1 + |t|$). Di conseguenza, risulta $|g_\lambda(x)| = |f(x) - \lambda|^{1/3} < 1 + |f(x) - \lambda| < 1 + |\lambda| + |f(x)|$, funzione sommabile in Ω (che ha misura *finita*). Dunque $|g_\lambda|$ è sommabile , quindi lo è anche g_λ.

b) Per ogni $x \in \Omega$, la funzione $\lambda \mapsto g_\lambda(x)$ è decrescente, così come la funzione $\lambda \mapsto G(\lambda) := \int_\Omega g_\lambda(x)\,\mathrm{d}m$; quindi esistono i limiti

$$G_- := \lim_{\lambda\to-\infty} G(\lambda) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{e} \quad G_+ := \lim_{\lambda\to+\infty} G(\lambda) \in \mathbb{R}] \cup \{-\infty\}.$$

Se, per assurdo, fosse ad esempio $G_+ \in \mathbb{R}$, la successione decrescente di funzioni sommabili $\{g_n\}$ avrebbe la corrispondente successione $\{G(n)\}$ degli integrali *limitata*. Ma allora, per il Teorema di Beppo Levi, $\{g_n\}$ dovrebbe convergere q. o. in Ω ad una funzione sommabile, impossibile perché $g_n(x)$ tende a $-\infty$ quando $n \to +\infty$.

$\boxed{3}$ È chiaro che ω non è chiusa, perché

$$\frac{\partial}{\partial y}\,(e^y + y\, e^x + 2y) = e^y + e^x + 2, \quad \text{mentre} \quad \frac{\partial}{\partial x}\,(x\, e^y + e^x - 2y) = e^y + e^x,$$

ma che lo è $\omega_1 := (e^y + y\, e^x)\mathrm{d}x + (x\, e^y + e^x - 2y)\mathrm{d}y$. Dato che ω_1 è chiusa in tutto $\mathbb{R}^2$, è anche esatta, quindi, posto $\widetilde{\omega} := \omega - \omega_1$, si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\gamma \widetilde{\omega} = \int_\gamma 2y\,\mathrm{d}x = -2 \int_{-\gamma} y\,\mathrm{d}x\,;$$

utilizzando ad esempio per $-\gamma$ la rappresentazione parametrica $x(t) = 2\cos t,\quad y(t) = \frac{2}{3}\sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$, si ottiene che

$$\int_\gamma \omega = -2 \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\sin t(-2\sin t)\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\pi.$$

Prova scritta del 24 Febbraio 2005

$\boxed{1}$ *Data la successione di funzioni*

$$f_n(x) := \frac{(\sin x)^n}{1 + n(\sin x)^n}\,,$$

i) calcolare (quando esiste) il limite puntuale di $\{f_n\}$ *su* $[0,\pi]$.
ii) Mostrare che la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n f_n(x)$$

converge puntualmente in $[0,\pi]$. *La convergenza è uniforme su* $[0,\pi]$*?*

$\boxed{2}$ *Per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, si ponga:*

$$f_\lambda(x,y) := x^3 + y^3 - xy + \lambda; \qquad \gamma_\lambda := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_\lambda(x,y) = 0\}.$$

i) Stabilire per quali valori di λ l'insieme γ_λ è sicuramente, nell'intorno di ogni suo punto, il sostegno di una curva regolare semplice.
ii) Studiare la curva di sostegno

$$\widetilde{\gamma}_0 := \{(x,y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0, \text{ e } f_0(x,y) = 0\}.$$

In particolare, determinare i punti di $\widetilde{\gamma}_0$ che hanno ascissa massima, e quelli che hanno ordinata massima.

[Suggerimento: una rappresentazione parametrica di $\widetilde{\gamma}_0$ si può ottenere determinando le intersezioni di $\widetilde{\gamma}_0$ con le semirette del primo quadrante che iniziano dall'origine].

Soluzione

$\boxed{1}$ *i)* Nell'intervallo $[0,\pi]$ si ha

$$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{n}\,\frac{n(\sin x)^n}{1+n(\sin x)^n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

quindi $\{f_n\}$ tende (uniformemente) alla funzione f identicamente nulla.

ii) Dato che $f_n(x) \geq 0$, e la successione $\{f_n(x)\}$ è infinitesima per ogni $x \in [0.\pi]$, è possibile applicare il criterio di Leibniz per dedurre la convergenza della serie <u>*se*</u> mostriamo che $\forall x \in]0,\pi[$ la successione è decrescente. Per $x \in]0,\pi[$, la condizione $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ equivale a

$$\sin x(1 + n(\sin x)^n) < 1 + (n+1)(\sin x)^{n+1},$$

cioé a

$$\sin x < 1 + (\sin x)^{n+1},$$

che è ovvia. Di conseguenza, la serie converge per ogni $x \in [0,\pi]$ ad un valore $s(x) \in \mathbb{R}$. Indicata con $s_n(x)$ la ridotta n-esima della serie nel punto x di $]0,\pi[$, è noto che risulta $|s(x) - s_n(x)| \leq f_{n+1}(x)\ \ \forall x \in [0,\pi]$. Poiché, come si è visto, $f_{n+1}(x) \leq 1/(n+1)\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, ne segue che

$$\sup_{0 \leq x \leq \pi} |s(x) - s_n(x)| \leq \frac{1}{n+1},$$

dunque la serie converge uniformemente nell'intervallo $[0,\pi]$.

$\boxed{2}$ *i)* Per il teorema del Dini, l'insieme γ_λ è sicuramente, nell'intorno di *ogni* suo punto, sostegno di una curva semplice se $\nabla f_\lambda(x,y) \neq 0\ \ \forall (x,y) \in \gamma_\lambda$. Le sole soluzioni del sistema

$$\begin{cases} D_x\, f_\lambda(x,y) = 3x^2 - y = 0 \\ D_y\, f_\lambda(x,y) = 3y^2 - x = 0 \end{cases}$$

sono $(0,0)$ e $(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$. Ma $(0,0) \in \gamma_\lambda \Longleftrightarrow \lambda = 0$, mentre $(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) \in \gamma_\lambda \Longleftrightarrow \lambda = \frac{1}{27}$. Dunque se λ è diverso da 0 e da $\frac{1}{27}$ l'insieme degli zeri di f_λ (che non è mai vuoto né ridotto ad un punto, dato che $(0,-\sqrt[3]{\lambda})$ e $(-\sqrt[3]{\lambda},0)$ appartengono a γ_λ) è localmente il sostegno di una curva regolare semplice.

ii) È evidente che $\widetilde{\gamma}_0$ è simmetrica rispetto alla bisettrice del primo quadrante, e che $(0,0) \in \widetilde{\gamma}_0$. Fissato $t > 0$, le intersezioni tra $\widetilde{\gamma}_0$ e la semiretta $\{(x,tx) \mid x \geq 0\}$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y = tx \\ x^3 + y^3 - xy = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} y = tx \\ (1+t^3)x^3 - tx^2 = 0 \end{cases} \qquad (t \geq 0).$$

Un'intersezione è $(0,0)$; per ogni $t>0$ c'è una ed una sola altra intersezione, nel punto $\left(\dfrac{t}{1+t^3},\dfrac{t^2}{1+t^3}\right)$. Una rappresentazione parametrica di $\widetilde{\gamma}_0$ è quindi data da

$$\widetilde{\gamma}_0(t)=(x(t),y(t)),\quad \text{con}\quad x(t)=\frac{t}{1+t^3},\ \ y(t)=\frac{t^2}{1+t^3}\quad (t\ge 0).$$

Si noti che $\lim_{t\to+\infty}\widetilde{\gamma}_0(t)=(0,0)$. Poiché

$$x'(t)=\frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},\quad y'(t)=t\,\frac{2-t^3}{(1+t^3)^2},$$

la semitangente nell'origine per $t\to 0+$ è orizzontale (per simmetria, quella per $t\to+\infty$ è verticale). La massima ascissa dei punti di $\widetilde{\gamma}_0$ si determina facilmente. Poiché $x(0)=\lim_{t\to+\infty}x(t)=0$, $x(t)$ deve avere massimo positivo in $]0,+\infty[$; dato che $x'(t)=0 \iff t=1/\sqrt[3]{2}$, il massimo vale $x(1/\sqrt[3]{2})=\frac{1}{3}\sqrt[3]{4}$. Per simmetria, questo è anche il massimo valore delle ordinate di punti $\in\widetilde{\gamma}_0$, ed è assunto per $t=\sqrt[3]{2}$. Nel punto $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{4},\frac{1}{3}\sqrt[3]{2})$ la tangente a $\widetilde{\gamma}_0$ è verticale, in $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{2},\frac{1}{3}\sqrt[3]{4})$ è orizzontale.

Le proprietà di convessità della funzione $y=y(x)$ che localmente –tranne i punti $(0,0)$ e $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{4},\frac{1}{3}\sqrt[3]{2})$– rappresenta la curva $\widetilde{\gamma}_0$ si ricavano facilmente osservando che (posto per semplicità $f:=f_0$)

$$y''(x)=-\left[f_{xx}(f_y)^2-2f_{xy}f_xf_y+f_{yy}(f_x)^2\right](f_y)^{-3}.$$

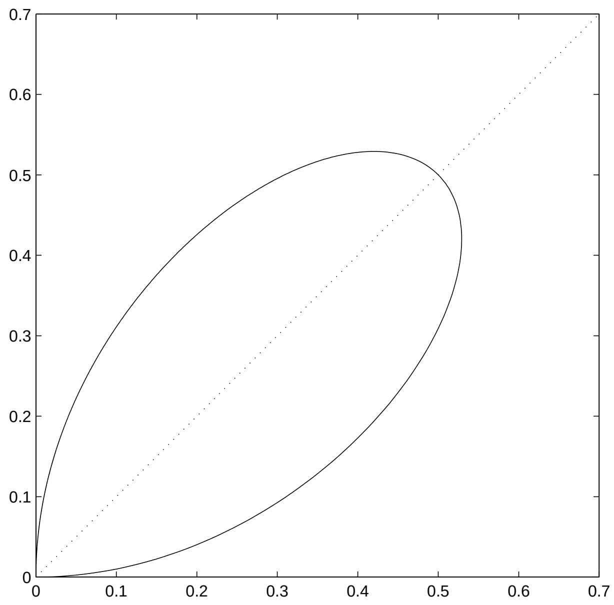
Dato che, come si è visto,

$$f_x=3x^2-y,\ \ f_y=3y^2-x,\ \text{da cui}\ f_{xx}=6x,\ \ f_{xy}=-1,\ \ f_{yy}=6y,$$

si calcola facilmente che su $\widetilde{\gamma}_0$, dove $x^3+y^3=xy$, l'espressione tra parentesi quadra vale $2xy$, quantità sempre positiva su $\widetilde{\gamma}_0\setminus(0,0)$. Di conseguenza, su $\widetilde{\gamma}_0$ privato dei punti $(0,0)$ e $(\frac{1}{3}\sqrt[3]{4},\frac{1}{3}\sqrt[3]{2})$ $y''(x)$ ha segno opposto a quello di

$$f_y(x,y(x))=3y^2(x)-x=\frac{t}{(1+t^3)^2}\,(2t^3-1),$$

ed è pertanto positiva se $0<t<1/\sqrt[3]{2}$, negativa se $t>1/\sqrt[3]{2}$. Il grafico di $\widetilde{\gamma}_0$ è il seguente:



Prova scritta del 16 Giugno 2005

1 *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n},$$

i) determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ in cui la serie converge.

ii) Calcolare, $\forall x \in A$, la somma della serie.

iii) Determinare un sottoinsieme con interno non vuoto di A in cui la serie converge uniformemente.

2 *Sia φ una funzione integrabile secondo Lebesgue nell'insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}$. Posto $f_n(x) := |\varphi(x)|^n$, si calcoli il $\lim_{n\to+\infty} \int_A f_n(x)\,\mathrm{d}x$.*

3 *Si consideri la forma differenziale*

$$\omega := \frac{\alpha xy}{(1-x^2)^2}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}y\,.$$

i) Determinare il dominio Ω di ω e disegnarlo nel piano. Determinare α in modo che ω sia chiusa in Ω.

ii) Stabilire se, per il valore (o i valori) di α di cui al punto precedente, la forma è esatta in Ω; in caso affermativo, scriverne un potenziale.

iii) Calcolare, sempre per il valore (o i valori) di α di cui al punto i), gli integrali $\int_\gamma \omega$ e $\int_{\widetilde{\gamma}} \omega$, dove γ è il segmento di estremi $(0,0)$ e $(\frac{1}{2},1)$, e $\widetilde{\gamma}$ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio $\frac{1}{2}$.

Soluzione

1 *i)* Per definizione,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x}{(1+x)^n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x}{(1+x)^k} = \lim_{n\to+\infty} x\,s_n(x),$$

dove $s_n(x)$ è la ridotta n-esima della serie geometrica di ragione $1/(1+x)$; in particolare, per $x=0$ si ha $x\,s_n(x) = 0$ per ogni n, quindi $0 \in A$. Per $x \neq 0$, si osservi che la serie geometrica di ragione $1/(1+x)$ converge se e solo se $|1+x| > 1$, cioè se e solo se $x > 0$ oppure $x < -2$; ne risulta che $A =]-\infty, -2[\cup [0, +\infty[$.

ii) Si è già visto che per $x = 0$ la somma della serie è uguale a zero. Per $x \in A \setminus \{0\}$, la somma della serie è uguale a

$$x\,\frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} = x\,\frac{1+x}{x} = 1+x.$$

iii) Fissati $N > \varepsilon > 0$, per $x \in [\varepsilon, N]$ si ha

$$0 < \frac{x}{(1+x)^n} \leq \frac{N}{(1+\varepsilon)^n},$$

e l'ultima quantità scritta è il termine generale di una serie numerica a termini postivi convergente; per il criterio di Weierstrass, la serie data converge uniformemente (ed assolutamente) in $[\varepsilon, N]$. In modo analogo si controlla che la serie converge uniformemente in $[-N, -2-\varepsilon]$.

$\boxed{2}$ Conviene introdurre gli insiemi

$$A_- := \{x \in A \mid |\varphi(x)| < 1\}; \quad A_1 := \{x \in A \mid |\varphi(x)| = 1\};$$
$$A_+ := \{x \in A \mid |\varphi(x)| > 1\},$$

che sono misurabili, disgiunti, e la cui unione dà A; l'integrale di f_n su A può quindi essere scritto come somma degli integrali su A_1, su A_- e su A_+. In A_1, si ha $f_n(x) = 1$, quindi l'integrale su A_1 vale $m(A_1)$ ed è indipendente da n. In A_-, si ha $|f_n(x)| = f_n(x) < |\varphi(x)|$, quindi, per il Teorema di Lebesgue sulla convergenza dominata,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_-} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A_-} \left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = 0.$$

Infine, in A_+ la successione $\{f_n\}$ è crescente; quindi anche la successione degli integrali su A_+ delle f_n è non decrescente, e tende ad un limite, finito o $= +\infty$. Se tale limite è finito, per il Teorema di Beppo Levi la successione $\{f_n(x)\}$ deve tendere quasi ovunque in A_+ ad una funzione integrabile; dato che in A_+ si ha $f_n(x) \to +\infty$, ciò è possibile se e solo se $m(A_+) = 0$.

In conclusione, il limite cercato vale:

$$\begin{cases} +\infty & \text{se } m(\{x \in A \mid |\varphi(x)| > 1\}) > 0, \\ m(\{x \in A \mid |\varphi(x)| = 1\}) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} & \text{se } m(\{x \in A \mid |\varphi(x)| > 1\}) = 0. \end{cases}$$

$\boxed{3}$ *i*) Il dominio Ω di ω è il complementare dell'insieme dei punti di $\mathbb{R}^2$ tali che $1-x^2 = 0$, cioè Ω è l'intero piano privato delle rette verticali $x = \mp 1$. Poiché

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\alpha xy}{(1-x^2)^2} = \frac{\alpha x}{(1-x^2)^2}; \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1-x^2} = \frac{2x}{(1-x^2)^2},$$

la forma differenziale è chiusa se e solo se $\alpha = 2$.

ii) Si noti che Ω *non è connesso*, ma è unione dei tre aperti connessi e disgiunti

$$\Omega_- :=]-\infty, -1[\times\mathbb{R}; \quad \Omega_0 :=]-1, 1[\times\mathbb{R}; \quad \Omega_+ :=]1, +\infty[\times\mathbb{R}.$$

È immediato verificare che la forma differenziale ω è esatta (lo è in ciascuno dei tre aperti descritti più sopra, che sono semplicemente connessi); ogni sua primitiva ha la forma (il calcolo è immediato)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{1-x^2} + c_- & \text{in } \Omega_-, \\ \dfrac{y}{1-x^2} + c_0 & \text{in } \Omega_0, \\ \dfrac{y}{1-x^2} + c_+ & \text{in } \Omega_+, \end{cases}$$

dove c_-, c_0, c_+ sono costanti arbitrarie.

iii) In entrambi i casi proposti, il cammino d'integrazione è tutto contenuto in Ω_0. Il primo integrale proposto vale quindi $f(\frac{1}{2}, 1) - f(0,0) = \frac{4}{3}$, mentre il secondo, calcolato su una linea chiusa, vale evidentemente zero.

Prova scritta dell'11 Luglio 2005

$\boxed{1}$ *Mostrare che se f è una qualsiasi funzione integrabile sull'intervallo $[a,b)$, si ha*

$$\lim_{\lambda\to\mp\infty} \int_a^b f(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

[Suggerimento: si esamini dapprima il caso di una funzione f a scala].

$\boxed{2}$ *Fissato $x_0 \neq 0$, determinare la serie di Taylor di centro x_0 delle funzioni*

$$g_1(x) := \frac{1}{x}; \qquad g_2(x) := \frac{1}{x^2},$$

specificandone gli insiemi di onvergenza.

$\boxed{3}$ *Data la forma differenziale*

$$\omega := -\frac{y}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{x}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}y,$$

determinarne il dominio Ω; mostrare che in Ω la forma ω è chiusa, *ma non è* esatta, *mentre è esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$. Generalizzare quest'ultimo risultato.*

Soluzione

$\boxed{1}$ Supponiamo dapprima che f sia una funzione a scala:

$$f(x) = c_k \quad \text{per} \quad a_{k-1} \leq x < a_k \qquad (k = 1, \ldots, N),$$

dove $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_N = b$; risulta allora

$$\int_a^b f(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{N} c_k\,\left[-\cos(\lambda x)\right]_{a_{k-1}}^{a_k},$$

e di conseguenza $\lim_{\lambda\to\mp\infty} \int_a^b f(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x = 0$. Se ora f è una generica funzione integrabile, fissato ad arbitrio $\varepsilon > 0$ esiste una funzione a scala $s(x)$ su $[a,b)$ tale che $\int_a^b |f(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$; per quanto appena visto, esiste $\lambda_\varepsilon > 0$ tale che se λ verifica $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$ si ha $\left|\int_a^b s(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon$. In definitiva, si ha quindi che, per ogni λ con $|\lambda| > \lambda_\varepsilon$,

$$\left|\int_a^b f(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x) - s(x)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_a^b s(x)\,\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x\right| < 2\varepsilon,$$

cioè la tesi.

$\boxed{2}$ Si ha intanto che

$$g_1(x) = \frac{1}{x - x_0 + x_0} = \frac{1}{x_0}\,\frac{1}{1 - \dfrac{x_0 - x}{x_0}},$$

quindi per $|x_0 - x| < |x_0|$ la funzione $g_1(x)$ si presenta come somma di una serie geometrica:

$$g_1(x) = \frac{1}{x_0}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\,\frac{(x-x_0)^n}{x_0^n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}\,(x-x_0)^n,$$

che coincide con la serie di Taylor della funzione. Lo sviluppo è valido *all'interno* del cerchio di centro x_0 e raggio $|x_0|$ (in campo complesso; quindi, in campo reale, nell'intervallo $(0, 2x_0)$ se $x_0 > 0$, oppure $(2x_0, 0)$ se $x_0 < 0$).

Per la seconda funzione, basta osservare che $g_2(x) = -g_1'(x)$; di conseguenza, per noti risultati sulle serie di potenze, si ha che

$$g_2(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x_0^{n+1}}\, n\,(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \,\frac{n+1}{x_0^{n+2}}\,(x-x_0)^n\,,$$

con lo stesso insieme di convergenza di g_1.

$\boxed{3}$ Il dominio Ω è ovviamente $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Poiché in Ω la forma è di classe C^1, ed inoltre (calcolo immediato) si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right),$$

ne viene che in Ω la forma è *chiusa*. Dato che il dominio *non è semplicemente connesso*, non se ne può dedurre che la forma sia esatta; in effetti, *non lo è*, come si vede ad esempio calcolando l'integrale di ω lungo la circonferenza unitaria Γ (percorsa in senso antiorario, quindi con rappresentazione parametrica data da $x = \cos\varphi,\ \ y = \sin\varphi,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi$). Si ha infatti

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^{2\pi} (-\cos\varphi\,(-\cos\varphi) + \sin\varphi\,\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \neq 0\,.$$

La forma è invece esatta in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \ge 0\}$; più in generale, ω è esatta in *ogni* sottoinsieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^2$ che non contenga l'origine.

Prova scritta del 12 Settembre 2005

$\boxed{1}$ *Sia $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ una funzione misurabile, dispari (cioè tale che $f(-x) = -f(x)$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$), e tale che la funzione $x \mapsto f(x)\sin x$ sia integrabile secondo Lebesgue su $[-\pi,\pi]$.*

i) Mostrare (per induzione) che $\forall n \in \mathbb{N}$ esistono finiti gli integrali

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

ii) Si può dedurre che anche f è integrabile secondo Lebesgue su $[-\pi,\pi]$?

$\boxed{2}$ *Si consideri la serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n}}\,\log\left(1+\frac{x^2}{\sqrt{n}}\right).$$

i) Determinare l'insieme di convergenza in $\mathbb{R}$ della serie. [Suggerimento: può essere utile dimostrare e usare le disuguaglianze

$$\log(1+t) \le t \ \ \text{e}\ \ t - \frac{t^2}{2} \le \log(1+t) \quad (\forall t \ge 0)].$$

ii) Determinare su quali intervalli la serie converge uniformemente.

$\boxed{3}$ *Data la funzione g integrabile secondo Lebesgue su* $[0, +\infty[$, *si ponga*

$$g_n(x) := g(x)\,\exp(-n\,\cos^2 x).$$

i) Calcolare il limite puntuale di $g_n(x)$.

ii) Calcolare, se esiste, il

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,dx.$$

Soluzione

$\boxed{1}$ *i)* Posto $F_n(x) := f(x)\,\sin(nx)$, per ipotesi F_1 è integrabile; se lo è F_n, dato che

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x) &= f(x)\,\sin(n+1)x = (f(x)\,\sin(nx))\,\cos x + (f(x)\,\sin x)\,\cos(nx) = \\ &= F_n(x)\,\cos x + F_1(x)\,\cos(nx), \end{aligned}$$

lo è anche F_{n+1}.

ii) Evidentemente no, come mostra la funzione

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{\sin x} & \text{se } x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{se } x = 0,\ x = \mp\pi. \end{cases}$$

$\boxed{2}$ *i)* Per dimostrare le disuguaglianze, basta considerare le funzioni

$$\varphi(x) := t - \log(1+t); \qquad \psi(t) := \log(1+t) - t + \frac{t^2}{2},$$

che sono in $C^\infty([0, +\infty[)$, e verificano $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi'(t) = 1 - \frac{1}{1+t} \geq 0$, $\psi'(t) = \frac{t^2}{1+t} \geq 0 \ \ \forall t \geq 0$.

Detto f_n il termine generale della serie, dalla prima disuguaglianza si ha che risulta

$$0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^{2n+2}}{n} \leq x^{2n+2},$$

quindi, per il *Teorema del confronto*, la serie converge per ogni x con $|x| < 1$.

Per $x = \mp 1$ si ha, grazie alla seconda disuguaglianza,

$$f_n(\mp 1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n}\right) \geq \frac{1}{2n},$$

e di conseguenza la serie diverge.

Infine, se $|x| > 1$ si ha $f_n(x) > f_n(1)$, e ancora la serie diverge.

ii) Per ogni $\varepsilon \in (0,1)$ si ha, ancora dalla prima disuguaglianza,

$$\sup_{|x| \leq 1-\varepsilon} f_n(x) \leq (1-\varepsilon)^{2n+2},$$

quindi, per il *Teorema di Weierstrass*, la serie converge uniformemente; più in generale, si vede che c'è convergenza uniforme su ogni intervallo $[-1+\varepsilon_1, 1-\varepsilon_2]$ $(\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in (0,1))$.

$\boxed{3}$ *i)* Se $\cos x = 0$, cioè se $x = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$ $(n \in \mathbb{N})$, si ha $g_n(x) = g(x)$, quindi $\lim_n g_n(x) = g(x)$; se invece $x \neq \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi$, risulta $\lim_n g_n(x) = 0$. In particolare, la successione $\{g_n\}$ tende a zero quasi ovunque in $[0, +\infty)$.

ii) Per ogni $x \geq 0$, poiché $\cos^2 x \geq 0$ ne viene che $|g_n(x)| \leq |g(x)|$ su $[0, +\infty)$. Dato che anche $|g|$ è integrabile secondo Lebesgue, per il *Teorema sulla convergenza dominata* ne risulta che

$$\lim_{nto+\infty} \int_0^{+\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

$\boxed{\textbf{Prova scritta del } 1^0 \textbf{ Febbraio 2006}}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Studiare, in campo reale, la serie di potenze*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, x^{2n-1}\,,$$

determinandone raggio di convergenza ϱ *e* somma *in* $(-\varrho\,, \varrho)$. *Qual è il comportamento della serie per* $x = \mp\varrho$ *?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Per ogni* $\alpha > 0$, *determinare la più generale funzione* $b_\alpha(x, y)$ *tale che la forma differenziale*

$$\omega_\alpha(x, y) := \frac{x}{(x^2 + y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x + b_\alpha(x, y)\,\mathrm{d}y$$

sia di classe C^1 *e* chiusa *in* $\Omega := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$*; è anche* esatta *in* Ω *?*

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Data la funzione*

$$F(t) := \int_0^{+\infty} \exp\left(-\left(x^2 + \frac{t^2}{x^2}\right)\right)\,\mathrm{d}x \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

i): mostrare che $F \in C^1(0, +\infty)$, *e che per* $t > 0$ *si ha* $F'(t) = -2F(t)$.
[Suggerimento: utilizzare, dopo averla verificata, la disuguaglianza $t\exp(-t) \leq 1/e$, valida $\forall t > 0$. Può anche essere utile il cambiamento di variabile $y := t/x$].

ii): Sapendo che $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$, *trovare l'espressione esplicita di* F.

Soluzione

$\boxed{\mathbf{1}}$ Poiché per $x = 1$ la serie diverge positivamente, deve essere $0 \leq \varrho \leq 1$. Indichiamo con $f(x)$ (per $x \in (-\varrho, \varrho)$) la somma della serie. Dato che $(n+1)x^{2n-1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2n} + x^{2n-1}$, dai risultati noti sulla serie geometrica si ha che, per ogni x in $(-1, 1)$, la serie converge, e la sua somma è data da

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x^{2n} + \sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n} + x\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{1-x^2} - 1\right) + \frac{x}{1-x^2} = \frac{x}{(1-x^2)^2} + \frac{x}{1-x^2} = \\ &= \frac{x(2-x^2)}{(1-x^2)^2}\,. \end{aligned}$$

Ne segue che $\varrho = 1$; è poi immediato che per $x = -1$ la serie diverge negativamente.

$\boxed{2}$ ω_α è di classe C^1 e chiusa in Ω se e solo se b_α è in $C^1(\Omega)$, e verifica

$$\frac{\partial b_\alpha(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{(x^2+y^2)^\alpha} = -\frac{2\alpha xy}{(x^2+y^2)^{\alpha+1}} \qquad \text{in } \Omega,$$

quindi se e solo se $b_\alpha(x,y) = y\,(x^2+y^2)^{-\alpha} + c_\alpha(y)$, dove c_α è un'arbitraria funzione in $C^1(\mathbb{R})$. Dato che Ω non è *semplicemente connesso*, non se ne può dedurre che ω_α sia esatta in Ω (ma neppure che non lo sia); occorre esaminare se ω_α ammette una primitiva f_α. Distinguiamo due casi:

i): $\alpha = 1$: se f_1 è una primitiva di ω_1, deve essere $\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^2+y^2)$, ed inoltre $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2} + c_1(y)$; il che si verifica ad esempio (con $c_1(y) = 0$) se

$$f_1(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2}\ ;$$

questa è dunque una primitiva in Ω di ω_1 (con $b_1(x,y) = y/(x^2+y^2)$), che quindi è esatta.

ii): $\alpha \in (0,+\infty)\setminus\{1\}$: in modo analogo, si verifica che la funzione

$$f_\alpha(x,y) := \frac{1}{2(1-\alpha)\,(x^2+y^2)^{\alpha-1}}$$

è una primitiva in Ω di ω_α (con $b_\alpha(x,y) = y/(x^2+y^2)^\alpha$), che quindi è esatta anche in questo caso.

$\boxed{3}$ *i)* Per verificare la disuguaglianza proposta, basta osservare che la funzione $g(t) := t\exp(-t)$ (che è, in particolare, in $C^0([0,+\infty))$), è sempre ≥ 0, si annulla per $t = 0$, ha limite $= 0$ per $t \to +\infty$. Dunque ha massimo, assunto in un punto $t_0 > 0$. La derivata $g'(t) = (1-t)\exp(-t)$ si annulla solo per $t = 1$, quindi $t_0 = 1$ e, $\forall t \geq 0$, $g(t) \leq g(1) = 1/e$.

Mostriamo che $F \in C^1(\varepsilon,+\infty)\quad \forall\varepsilon > 0$, quindi $F \in C^1(0,+\infty)$. Indichiamo per comodità con $\varphi(x,t)$ la funzione integranda, che è positiva e maggiorata per ogni t dalla funzione $\exp(-x^2)$, integrabile su $(0,+\infty)$; poiché per $t \neq 0$ si ha

$$\frac{\partial\varphi(x,t)}{\partial t} = -\frac{2}{t}\exp(-x^2)\left(\frac{t^2}{x^2}\exp(-t^2/x^2)\right),$$

dalla disuguaglianza dimostrata all'inizio dell'esercizio si ha inoltre che in $(\varepsilon,+\infty)$ risulta $|\varphi(x,t)| \leq 2\exp(-1-x^2)/\varepsilon$, funzione integrabile (in x) su $(0,+\infty)$. Per il teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha allora che

$$F'(t) = \int_0^{+\infty} -\frac{2t}{x^2}\exp\left(-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)\right)\mathrm{d}x,$$

funzione continua in $(\varepsilon,+\infty)$, dunque, per l'arbitrarietà di ε, in $(0,+\infty)$.

Con la sostituzione suggerita, si calcola immediatamente che

$$F'(t) = \int_{+\infty}^0 -\frac{2y^2}{t}\left(-\frac{t}{y^2}\right)\exp\left(-\left(\frac{t^2}{y^2}+y^2\right)\right)\mathrm{d}y = -2F(t).$$

ii) Poiché la funzione (positiva) F verifica, per ogni $t > 0$, $\frac{F'(t)}{F(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln F(t) = -2$, ne viene che, sempre per $t > 0$, $F(t) = C\exp(-2t)$, dove $C = F(0) = \int_0^{+\infty}\exp(-x^2)\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}/2$. Dato che F è *pari* ($F(-t) = F(t)$), si ha pertanto $F(t) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\exp(-2|t|)$.

Prova scritta del 21 Febbraio 2006

$\boxed{1}$ *i) Calcolare l'integrale curvilineo I della forma differenziale*

$$(2x - x^2y + y^3)\mathrm{d}x - (2y - xy^2 + x^3)\mathrm{d}y$$

lungo il perimetro del quadrato di vertici $(\mp 1, \mp 1)$, *orientato nel verso orario.*

ii) Determinare (se è possibile) $\alpha \in C^1(\mathbb{R})$, *non identicamente nulla, tale che la forma differenziale*

$$(2x - x^2y + y^3)\alpha(xy)\mathrm{d}x - (2y - xy^2 + x^3)\alpha(xy)\mathrm{d}y$$

sia esatta *in* $\mathbb{R}^2$*; per tale* α*, scrivere una primitiva della forma.*

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Si consideri la serie* $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, *dove*

$$f_n(x) := \frac{x^2}{(1-x^2)^n}.$$

i) Determinare l'insieme I_0 *dei punti* $x \in \mathbb{R}$ *in cui la serie converge, e la* somma *della serie in* I_0*. Caratterizzare i sottoinsiemi di* I_0 *nei quali la serie converge* uniformemente.

ii) Calcolare

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_2^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Sia* $A \subset (-\pi, \pi)$ *un sottoinsieme misurabile secondo Lebesgue, e sia* $\{x_n\}$ *una successione reale. Calcolare*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_A \sin^2(nt + x_n)\,\mathrm{d}t.$$

Soluzione

$\boxed{\mathbf{1}}$ *i)* Direttamente dalla definizione, si ha

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1}(2x - x^2 + 1)\mathrm{d}x - \int_{-1}^{1}(2y - y^2 + 1)\mathrm{d}y - \int_{-1}^{1}(2x + x^2 - 1)\mathrm{d}x + \\ &+ \int_{-1}^{1}(2y + y^2 - 1)\mathrm{d}y = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} - \left[y^2 - \frac{y^3}{3} + y\right]_{-1}^{1} - \left[x^2 + \frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} + \\ &+ \left[y^2 - y + \frac{y^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

ii) Poiché il dominio della forma differenziale è tutto $\mathbb{R}^2$, la forma è esatta se e solo se è *chiusa*, cioé se e solo se, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$(-x^2 + 3y^2)\alpha(xy) + (2x^2 - x^3y + xy^3)\alpha'(xy) = (y^2 - 3x^2)\alpha(xy) - (2y^2 - xy^3 + x^3y)\alpha'(xy).$$

Si deve quindi avere $(2x^2 + 2y^2)[\alpha(xy) + \alpha'(xy)] = 0$ in $\mathbb{R}^2$, cioé $\alpha(t) + \alpha'(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$, da cui $\alpha(t) = c\exp(-t)$ $(c \in \mathbb{R})$; una corrispondente forma differenziale esatta (con $c = 1$) è allora

$$[2x - y(x^2 - y^2)]\exp(-xy)\mathrm{d}x + [-2y - x(x^2 - y^2)]\exp(-xy)\mathrm{d}y.$$

Scritta una primitiva $F(x, y)$ nella forma $F(x, y) = f(x, y)\exp(-xy)$, si deve avere

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} - yf(x,y) = 2x - y(x^2 - y^2) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} - xf(x,y) = -2y - x(x^2 - y^2),$$

relazioni verificate ad esempio da $f(x, y) = x^2 - y^2$, da cui $F(x, y) = (x^2 - y^2)\exp(-xy)$.

$\boxed{2}$ *i*) La serie converge evidentemente per $x = 0$ ($f_n(0) = 0 \quad \forall n$). Poiché, per $x \neq \mp 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x^2 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{1-x^2}\right)^k = x^2 - 1 + \frac{(-1)^n}{(x^2-1)^n} \qquad (\forall n \in \mathbb{N}),$$

si ha inoltre che la serie data converge se $|1 - x^2| > 1$, cioé se $x < -\sqrt{2}$ oppure $x > \sqrt{2}$. Insieme di convergenza puntuale I_0 e somma $f(x)$ della serie in I_0 sono quindi

$$I_0 = (-\infty, -\sqrt{2}) \cup \{0\} \cup (\sqrt{2}, +\infty); \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0, \\ x^2 - 1 & \text{se } x^2 > 2. \end{cases}$$

Posto, per ogni $\varepsilon > 0$, $I_\varepsilon := (-\infty, -\sqrt{2}-\varepsilon) \cup \{0\} \cup (\sqrt{2}+\varepsilon, +\infty)$, c'è convergenza uniforme nel sottoinsieme I se e solo se esiste $\varepsilon > 0$ in modo che $I \subset I_\varepsilon$, come si vede facilmente osservando che

$$\sup_{x \in I} |f(x) - \sum_{k=0}^{n} f_k(x)| = \sup_{x \in I \setminus \{0\}} \frac{1}{(x^2-1)^n} = \left[\inf_{x \in I \setminus \{0\}} (x^2 - 1)\right]^{-n}$$

(dato che la funzione $g(x) := (x^2 - 1)^{-n}$ è pari, continua e decrescente per $x > \sqrt{2}$), e l'ultima quantità scritta è infinitesima per $n \to +\infty$ se e solo se $x^2 > 2 + \varepsilon \quad \forall x \in I \setminus \{0\}$ per un opportuno $\varepsilon > 0$.

ii) In particolare, nell'intervallo $[2, 5]$ la serie converge uniformemente, ed è quindi lecito integrare per serie; si ha allora

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_2^5 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^5 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right) \mathrm{d}x = \int_2^5 (x^2 - 1)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_2^5 = 36.$$

$\boxed{3}$ Si ha $\sin^2(nt + x_n) = \frac{1}{2}\,[1 - \cos 2(nt + x_n)] = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\,\cos 2nt\,\cos 2x_n + \frac{1}{2}\,\sin 2nt\,\sin 2x_n$; la funzione caratteristica χ_A di A per ipotesi è integrabile, dunque

$$\begin{aligned}
\int_A \sin^2(nt + x_n)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\,m(A) - \frac{1}{2}(\cos 2x_n) \int_A \cos 2nt\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2}(\sin 2x_n) \int_A \sin 2nt\,\mathrm{d}t = \\
&= \frac{1}{2}\,m(A) - \frac{1}{2}(\cos 2x_n) \int_{-\pi}^{\pi} \chi_A(t)\,\cos 2nt\,\mathrm{d}t + \\
&+ \frac{1}{2}(\sin 2x_n) \int_{-\pi}^{\pi} \chi_A(t)\,\sin 2nt\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Per il Lemma di Riemann-Lebesgue, gli ultimi due integrali scritti tendono a zero per $n \to +\infty$; poiché $|\sin 2x_n| \leq 1$, $|\cos 2x_n| \leq 1$, il limite proposto vale $\frac{1}{2}\,m(A)$.

Prova scritta dell'8 Giugno 2006

$\boxed{1}$ *Costruire una successione reale $\{a_n\}$ tale che, posto $\forall n \in \mathbb{N}$*

$$b_n := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \qquad c_n := \frac{b_1 + \ldots + b_n}{n},$$

una ed una sola delle successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ abbia limite finito.

$\boxed{2}$ *Per ogni $\alpha > 0$ fissato, si consideri la successione di funzioni $\{f_{\alpha,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, dove*

$$f_{\alpha,n}(x) := n^\alpha\, x^2\, e^{-nx^2}.$$

i) Mostrare che, $\forall x \in \mathbb{R}$*,* $\{f_{\alpha,n}(x)\}$ *tende ad un limite finito* $f_\alpha(x)$*.*

ii) Mostrare che quando $\alpha \geq 1$ *la convergenza di* $\{f_{\alpha,n}(x)\}$ *ad* f_α *è* uniforme *nell'intervallo* $[a,b]$ *(*$a < b$*)) se e solo se* $a > 0$ *oppure* $b < 0$*.*

iii) Determinare per quali $\alpha > 0$ *è vero che*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-1}^{1} f_{\alpha,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Calcolare l'insieme di convergenza puntuale e la somma delle serie*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}}; \qquad\qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!\,(1-x^2)^{2n}}.$$

Soluzione

$\boxed{\mathbf{1}}$ L'unica delle tre successioni che può avere limite senza che lo abbia almeno una delle altre due è evidentemente $\{c_n\}$. Ad esempio (si vedano gli appunti sulle serie di Fourier) ciò accade se $b_n = (-1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Il problema allora è risolto se si trova una successione a_n di cui $\{b_n\}$ è successione delle medie aritmetiche. Per questo, occorre e basta che sia

$$a_n = nb_n - (n-1)b_{n-1} = (-1)^n n - (-1)^{n-1}(n-1) = (-1)^n(2n-1),$$

dunque un esempio è dato da

$$a_n := (-1)^n(2n-1) \quad (\text{da cui } \; b_n = (-1)^n, \;\; c_n = \{-1 + (-1)^n\}/(2n)\,).$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *i)* È ovvio che $f_\alpha(0) = 0$; anche per $x \neq 0$, dato che $f_{\alpha,n}(x) = n^\alpha\, x^2/e^{nx^2}$ si ricava subito (confronto di infiniti) che $f_\alpha(x) = 0$.

ii) Se $a > 0$, nell'intervallo $[a,b]$ si ha $\max|f_{\alpha,n}(x)| \leq n^\alpha\, b^2/e^{na^2}$, e l'ultima quantità è infinitesima per $n \to +\infty$; il caso $b < 0$ è analogo, dato che allora si ha $\max|f_{\alpha,n}(x)| \leq n^\alpha\, a^2/e^{nb^2}$. Se invece $a \leq 0$ e $b \geq 0$, dato che $a < b$ deve essere $a < 0$ oppure $b > 0$ (o entrambi). Se, ad esempio, $a \leq 0$ e $b > 0$, la successione $\{1/\sqrt{n}\}$ è definitivamente in $[a,b]$, quindi

$$\max|f_{\alpha,n}(x)| \geq f_{\alpha,n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{n^{\alpha-1}}{e} \geq \frac{1}{e}\,,$$

dunque la convergenza *non è uniforme* in $[a,b]$; il caso $a < 0$ e $b \geq 0$ si riconduce al precedente (le funzioni $f_{\alpha,n}$ sono *pari*).

iii) Integrando dapprima per parti, poi per sostituzione ($y := x\sqrt{n}$), si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} f_{\alpha,n}(x)\,\mathrm{d}x &= 2n^\alpha \int_0^1 x(x\,e^{-nx^2})\,\mathrm{d}x = \\
&= 2n^\alpha \left(\left[-\frac{1}{2n}\,x\,e^{-nx^2} \right]_0^1 + \frac{1}{2n}\int_0^1 e^{-nx^2}\,\mathrm{d}x \right) = \\
&= -n^{\alpha-1}\,e^{-n} + n^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{d}y = \\
&= -n^{\alpha-1}\,e^{-n} + n^{\alpha-\frac{3}{2}} \int_0^{\sqrt{n}} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

Per $n \to +\infty$, nell'ultima quantità scritta il primo addendo tende a zero qualunque sia α, mentre l'integrale nel secondo addendo tende a $\int_0^{+\infty} e^{-y^2}\,\mathrm{d}y = \sqrt{\pi}/2$. In conclusione, si ha che

$$\left(\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_{\alpha,n}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} f_\alpha(x)\,\mathrm{d}x = 0\right) \iff \left(\alpha < \frac{3}{2}\right).$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ I termini della prima serie sono definiti solo se $x \neq 1$. Sotto questa ipotesi, posto $y := x/(1-x)^2$ il termine generale della serie si scrive y^n: si tratta quindi di una serie *geometrica* (privata del primo termine), che converge (a $\frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}$) se e solo se $|y| < 1$, cioé $|x| < (1-x)^2$, disequazione soddisfatta se $x \in (0, (3-\sqrt{5})/2) \cup ((3+\sqrt{5})/2, +\infty)$. Dato che $\frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) < 1 < \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})$, si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(1-x)^{2n}} = \frac{\frac{x}{(1-x)^2}}{1-\frac{x}{(1-x)^2}} = \frac{x}{1-3x+x^2}$$
$$\text{per } x \in \left(-\infty, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

Il termine generale della seconda serie è definito solo se $x \neq \mp 1$; in questa ipotesi, posto $z := x/(1-x^2)^2$, si scrive nella forma $z^n/n!$. Si tratta quindi di una *serie esponenziale* (privata del primo termine), che converge (ad $e^y - 1$) per ogni y. Di conseguenza,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n!\,(1-x^2)^{2n}} = \exp\frac{x}{(1-x)^2} - 1 \qquad \text{per } x \neq \mp 1.$$

Prova scritta del 10 Luglio 2006

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Posto, per ogni* $(x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$,

$$f_n(x) := \min\{1;\ (x^2-x)^n\},$$

verificare che in $\mathbb{R}$ *la successione* $\{f_n\}$ *converge, ma non uniformemente.*

Per quali $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta \in \mathbb{R}$ *(con* $\alpha \le \beta \le \gamma \le \delta$*) si ha convergenza uniforme della successione in* $(-\infty, \alpha] \cup [\beta, \gamma] \cup [\delta, +\infty)$*?*

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(2x+1)^n},$$

i) se ne determini l'insieme I *di convergenza;*

ii) si calcoli la somma della serie in I*.*

Osservato che l'espressione analitica di tale somma definisce una funzione g *il cui campo di esistenza contiene strettamente* I*, si stabilisca per quali* $x_0 \in \mathbb{R}$ *la funzione* g *è sviluppabile in serie di Taylor di centro* x_0*:*

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x_0)\,(x-x_0)^n,$$

determinando esplicitamente i coefficienti $a_n(x_0)$ ed il raggio di convergenza $\varrho(x_0)$ della serie.

$\boxed{3}$ *Sia Γ la circonferenza con centro nel generico punto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e raggio $\varrho_0 > 0$, orientata positivamente e percorsa una volta. Si calcoli l'integrale su Γ della forma differenziale*

$$\omega = (3x^2 - 2y^4)\,\mathrm{d}x - (8xy^3 - x)\,\mathrm{d}y\,.$$

[Suggerimento: si osservi che ω si può scrivere come somma di due forme differenziali, di ciascuna delle quali il calcolo dell'integrale su Γ è immediato].

Soluzione

$\boxed{1}$ La parabola di equazione $y = x^2 - x$ passa per i punti $(0,0)$, $(1,0)$, ha il vertice in $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4})$, e le sue intersezioni con la retta $y = 1$ sono nei punti di ascissa $x_1 = (1-\sqrt{5})/2$, $x_2 = (1+\sqrt{5})/2$. Dunque

$$f_n(x) = \begin{cases} (x^2 - x)^n & \text{se } x_1 < x < x_2, \\ 1 & \text{se } x \le x_1 \text{ oppure } x \ge x_2. \end{cases}$$

Poiché per $x \in (x_1, x_2)$ si ha $-\frac{1}{4} < x^2 - x < 1$, per ogni $x \in \mathbb{R}$ la successione data converge, ed il suo limite è $f(x) = 1 - \chi_{(x_1,x_2)}(x)$. Dato che la funzione limite non è continua, la convergenza non può essere uniforme in $\mathbb{R}$.

In $(-\infty, \alpha] \cup [\delta, +\infty)$, sempre per le discontinuità di f nei punti x_1, x_2, la successione è uniformemente convergente se e solo se $\alpha \le x_1$ e $\delta \ge x_2$ (nel qual caso è addirittura costante). Ancora, ci può essere convergenza uniforme in $[\beta, \gamma]$ solo se $\gamma \le x_1$ o $\beta \ge x_2$ (casi però banali, perché anche in questo caso la successione è costante), oppure se si ha $x_1 < \beta \le \gamma < x_2$. In quest'ultimo caso, in effetti, risulta $|\beta^2 - \beta| < 1$ e $|\gamma^2 - \gamma| < 1$, quindi

$$\max_{\beta \le x \le \gamma} |f_n(x)| = \max\left\{\frac{1}{4^n};\ |\beta^2 - \beta|^n;\ |\gamma^2 - \gamma|^n\right\} \to 0 \quad \text{per} \quad n \to +\infty.$$

$\boxed{2}$ Perché i termini della serie siano definiti, occorre che $x \neq -\frac{1}{2}$; in questa ipotesi, si tratta di una serie geometrica di ragione $x/(2x+1)$, privata del primo termine. Si ha dunque convergenza se e solo se $|x| < |2x+1|$; si vede immediatamente che questa condizione equivale a $x \in I := (-\infty, -1) \cup (-1/3, +\infty)$. Quando $x \in I$, la somma della serie è

$$\frac{1}{1 - \frac{x}{2x+1}} - 1 = \frac{2x+1}{x+1} - 1 = \frac{x}{x+1}\,,$$

espressione analitica che definisce una funzione g da $\mathbb{R} \setminus \{-1\} \supset I$ in $\mathbb{R}$. Fissato ad arbitrio $x_0 \neq -1$, si osservi che

$$\frac{x}{x+1} = \frac{(x - x_0) + x_0}{(x - x_0) + (x_0 + 1)} = \frac{(x - x_0) + x_0}{(x_0 + 1)\left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 + 1}\right)}\,.$$

Se $|x - x_0| < |x_0 + 1|$, la quantità $1 \Big/ \left(1 + \frac{x - x_0}{x_0 + 1}\right)$ è la somma della serie geometrica di ragione $-\frac{x - x_0}{x_0 + 1}$; se ne deduce che in tal caso si ha

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{(x - x_0) + x_0}{x_0 + 1} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x - x_0}{x_0 + 1}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x - x_0}{x_0 + 1}\right)^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x_0\, \frac{(x - x_0)^n}{(x_0 + 1)^{n+1}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{x-x_0}{x_0+1}\right)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, x_0\, \frac{(x-x_0)^n}{(x_0+1)^{n+1}} \\
&= \frac{x_0}{x_0+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(x_0+1)^{n+1}}\, (x-x_0)^n\,,
\end{aligned}
$$

che coincide con lo sviluppo di Taylor di g: si ha quindi (per ogni $x_0 \neq -1$)

$$
\varrho(x_0) = |x_0+1|; \qquad a_0(x_0) = \frac{x_0}{x_0+1}; \qquad a_n(x_0) = \frac{(-1)^{n-1}}{(x_0+1)^{n+1}} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).
$$

$\boxed{3}$ È evidente che la forma differenziale ω (di dominio tutto $\mathbb{R}^2$) *non è esatta*, dato che *non è chiusa*: infatti,

$$
\frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2y^4) = -8y^3; \qquad \frac{\partial}{\partial x}(-8xy^3 + x) = -8y^3 + 1.
$$

Si può però scrivere $\omega = \omega_1 + \omega_2$, dove

$$
\omega_1 = (3x^2 - 2y^4)\, \mathrm{d}x - 8xy^3\, \mathrm{d}y\,, \qquad \omega_2 = x\, \mathrm{d}y\,.
$$

La prima forma è chiusa in $\mathbb{R}^2$, quindi esatta, dunque $\int_\Gamma \omega_1 = 0$. Il calcolo dell'integrale su Γ di ω_2 è immediato: scelta ad esempio come rappresentazione parametrica di Γ la seguente:

$$
\Gamma : \begin{cases} x(t) = x_0 + \varrho_0 \cos t, \\ \\ y(t) = y_0 + \varrho_0 \sin t, \end{cases} \qquad (0 \le t < 2\pi)
$$

si ha che

$$
\int_\Gamma x\, \mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} (x_0 + \varrho_0 \cos t)\, \varrho_0 \cos t\, \mathrm{d}t = \frac{\varrho_0^2}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 2t)\, \mathrm{d}t = \pi \varrho_0^2.
$$

In conclusione,

$$
\int_\Gamma \omega = \int_\Gamma \omega_1 + \int_\Gamma \omega_2 = \pi \varrho_0^2.
$$

Prova scritta del 14 Settembre 2006

$\boxed{1}$ *Data la successione di funzioni* $\{f_n\}$ *definite per* $x \ge 0$ *da*

$$
f_n(x) := n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right),
$$

i) determinare l'insieme I *in cui la successione ha limite finito;*

ii) calcolarne il limite $f(x) \quad \forall x \in I$*;*

iii) caratterizzare *i sottoinsiemi di* I *in cui la convergenza è uniforme.*

$\boxed{2}$ *Stabilire per quali* $x_0 \in \mathbb{R}$ *la funzione definita dall'espressione*

$$
\varphi(x) := \frac{x-5}{3x^2 + 5x - 2},
$$

è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0*; per tali* x_0*, calcolare il raggio di convergenza* $\varrho(x_0)$ *ed i coefficienti* $a_n(x_0)$ *della serie di Taylor.*

[Suggerimento: può essere utile riscrivere l'espressione analitica di φ in modo da utilizzare sviluppi in serie ben noti.]

$\boxed{3}$ *Si consideri la forma differenziale lineare*

$$\omega := \frac{2x}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+2y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y;$$

i): dire, motivando la risposta, se la forma ω è esatta;

ii): calcolare l'integrale di ω lungo la circonferenza Γ_R di centro l'origine e raggio $R > 0$, percorsa una volta in senso antiorario;

iii): calcolare l'integrale di ω lungo il bordo C_a del quadrato con vertici in $(-a, a)$, (a, a), $(a, -a)$, $(-a, -a)$ $(a > 0)$, percorso una volta in senso orario.

Soluzione

$\boxed{1}$ *i)*, *ii)*: è ovvio che $0 \notin I$, mentre $1 \in I$ (si ha $f_n(0) = -n$ e $f_n(1) = 0$). Per ogni fissato $x > 0$, si ha, per $n \to +\infty$,

$$n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) = n\left(e^{(\ln x)/n} - 1\right) = \ln x + \frac{\ln^2 x}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \to \ln x.$$

Di conseguenza, $I = (0, +\infty)$ e $f(x) = \ln x$.

iii): condizione *sufficiente* perchè nell'insieme $A \subset (0, +\infty)$ si abbia convergenza uniforme è che risulti

$$(*) \qquad \alpha := \inf A > 0 \quad \text{e} \quad \beta := \sup A < +\infty.$$

In tal caso si ha infatti

$$\left|x\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) - \ln x\right| = \frac{\ln^2 x}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{2n}\max\{\ln^2\alpha; \ln^2\beta\} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

quindi $\sup_{x\in A}\left|n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)\right| \to 0$ per $n \to +\infty$.

Le $(*)$ sono anche *necessarie* per la convergenza uniforme in A. Infatti,

- se $\alpha = 0$, allora, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A : 0 < a_n \le e^{-n}$, da cui
$$\sup_{x\in A}|f_n(x) - \ln x| \ge |f_n(a_n) - \ln a_n| = \frac{n}{e} \to +\infty;$$
- se $\beta = +\infty$, sempre $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists b_n \in A : b_n \ge e^n$; ma allora
$$\sup_{x\in A}|f_n(x) - \ln x| \ge |f_n(b_n) - \ln b_n| = n(e-2) \to +\infty.$$

$\boxed{2}$ Osservato che $3x^2 + 5x - 2 = (3x-1)(x+2)$, conviene scrivere la funzione φ come segue:

$$\varphi(x) = \frac{x-5}{(3x-1)(x+2)} = \frac{(3x-1) - 2(x+2)}{(3x-1)(x+2)} = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{3x-1}.$$

Dato che $\lim_{x\to-2}|\varphi(x)| = \lim_{x\to1/3}|\varphi(x)| = +\infty$, certamente φ *non* è sviluppabile in serie di Taylor di centro x_0 se $x_0 = -2$ oppure $x_0 = 1/3$. Per $x_0 \neq -2$, $x_0 \neq 1/3$ si ha

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{(2+x_0) + (x-x_0)} + \frac{2}{(1-3x_0) - 3(x-x_0)} = \\ &= \frac{1}{2+x_0}\,\frac{1}{1+\frac{x-x_0}{2+x_0}} + \frac{2}{1-3x_0}\,\frac{1}{1-3\frac{x-x_0}{1-3x_0}}.\end{aligned}$$

Il secondo fattore del primo addendo è la somma della serie geometrica di ragione $-(x-x_0)/(2+x_0)$, convergente se $|x-x_0|<|2+x_0|$; il secondo fattore del secondo addendo è la somma della serie geometrica di ragione $3(x-x_0)/(1-3x_0)$, convergente se $|x-x_0|<\left|\frac{1}{3}-x_0\right|$. Di conseguenza, lo sviluppo cercato, per $x_0\neq -2,\ x_0\neq 1/3$, è dato da

$$\varphi(x)=\varphi(x_0)+\sum_{n=1}^{+\infty}c_n(x_0)\,(x-x_0)^n,\quad c_n(x_0)=\frac{(-1)^n}{(2+x_0)^{n+1}}+\frac{3^n}{(1-3x_0)^{n+1}};$$

il raggio di convergenza dello sviluppo è $\varrho(x_0)=\min\left\{|2+x_0|;\left|\frac{1}{3}-x_0\right|\right\}$.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *i)*: è evidente che la forma differenziale ω (di dominio $\Omega:=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$) *non è esatta*, dato che *non è chiusa*: infatti, in Ω si ha

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{2x}{x^2+y^2}=-\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2};\qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{x+2y}{x^2+y^2}=\frac{y^2-x^2-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

ii): scelta ad esempio come rappresentazione parametrica di Γ_R quella abituale ($x=R\cos t,\ y=R\sin t$, con $0\le t<2\pi$), si ha subito che

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_R}\omega &= \int_0^{2\pi}\left(\frac{2\varrho\cos t}{\varrho^2}(-\varrho\sin t)+\frac{\varrho(\cos t+2\sin t)}{\varrho^2}\,\varrho\cos t\right)\mathrm{d}t=\\ &= \int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t=\pi.\end{aligned}$$

iii): si ha

$$\int_{C_a}\omega=\int_{-a}^{a}\omega|_{y=a}\,\mathrm{d}x+\int_a^{-a}\omega|_{x=a}\,\mathrm{d}y+\int_a^{-a}\omega|_{y=-a}\,\mathrm{d}x+\int_{-a}^{a}\omega|_{x=-a}\,\mathrm{d}y,$$

da cui

$$\begin{aligned}\int_{C_a}\omega &= \int_{-a}^{a}\frac{2x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\int_a^{-a}\frac{a+2y}{a^2+y^2}\,\mathrm{d}y+\int_a^{-a}\frac{2x}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+\\ &+ \int_{-a}^{a}\frac{2y-a}{a^2+y^2}\,\mathrm{d}y=-\frac{2}{a}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}y}{1+\left(\frac{y}{a}\right)^2}\,\mathrm{d}y=-2\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}\tau}{1+\tau^2}=-\pi.\end{aligned}$$

Prova scritta del 5 Febbraio 2007

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Data (in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$) la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n\,x^n},\qquad \text{dove}\qquad a_n:=\binom{2n}{n},$$

i): determinare l'insieme di convergenza puntuale *della serie;*

ii): dare una caratterizzazione completa *dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ in cui c'e convergenza* totale.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Considerata la successione di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$*

$$f_n(x):=n\,\sqrt[n]{n\,|\sinh x|}\;\chi_{[-1/n,1/n]}(x),$$

stabilire se esiste una funzione g sommabile in $\mathbb{R}$ tale che $f_n(x)\le g(x)$ per ogni $n\in\mathbb{N}$, q.o. in $\mathbb{R}$.

[N.B.: sinh è il seno iperbolico; χ_A è la funzione caratteristica di A].

$\boxed{3}$ *Determinare i coefficienti della serie di Fourier* $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ *della funzione* $|\sin x|$. *Dedurne la somma delle serie numeriche*

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}; \qquad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1}.$$

Soluzione

$\boxed{1}$ Posto $y := x^{-1}$ e $c_n := a_n^{-1}$, si è ricondotti a studiare il comportamento della serie di potenze $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, y^n \quad (y\neq 0)$; di conseguenza,

i) dato che

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}\,\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{n+1}{2(2n+1)}\to\frac{1}{4}\quad \text{per } n\to+\infty,$$

il raggio di convergenza della serie di potenze è uguale a 4. Per $|y|=4$ la serie non può convergere: si ha infatti

$$4^{n+1}c_{n+1}=(4^n c_n)\frac{2(n+1)}{2n+1}>4^n c_n\geq 4c_1=2,$$

quindi per $|y|=4$ il termine generale della serie *non è infinitesimo.*

In conclusione, l'insieme di convergenza puntuale per la serie di funzioni assegnata è $\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$.

ii) Per ogni $\varepsilon>0$ fissato, la serie di potenze converge totalmente se $|y|\leq\frac{4}{1+4\varepsilon}$; ne viene che condizione *sufficiente* affinché la serie di funzioni assegnata converga *totalmente* nell'insieme A è che esista $\varepsilon>0$ in modo che risulti $A\subset I_\varepsilon := \left(-\infty,-\frac{1}{4}-\varepsilon\,\right]\cup\left[\,\frac{1}{4}+\varepsilon,+\infty\right)$.

Mostriamo che tale condizione è anche *necessaria.*

È chiaro che se in A la serie di funzioni converge totalmente, deve essere intanto $A\subset\left(-\infty,-\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$; resta da mostrare che, per un opportuno $\varepsilon>0$, si ha inoltre che $A\subset I_\varepsilon$. Per assurdo, supponiamo che per ogni $k\in\mathbb{N}$ fissato esista un $x_k\in A$ tale che $\frac{1}{4}<|x_k|<\frac{1}{4}+\frac{1}{k}$. Per definizione di convergenza totale, esiste una serie convergente a termini positivi $\sum_{n=1}^{+\infty}\alpha_n$ tale che, almeno definitivamente, $c_n|x|^{-n}\leq\alpha_n \quad \forall x\in A$; in particolare, si deve avere, definitivamente, $c_n|x_k|^{-n}\leq\alpha_n \quad \forall k\in\mathbb{N}$, quindi anche

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{c_n}{|x_k|^n}=\frac{c_n}{\inf_{k\in\mathbb{N}}|x_k|^n}=4^n c_n\leq\alpha_n,$$

assurdo perchè, come si è visto nella dimostrazione di *i*), la successione $\{4^n c_n\}$ non è infinitesima.

$\boxed{2}$ Si noti anzitutto che $f_n(0)=0 \ \ \forall n\in\mathbb{N}$; per ogni fissato $x\neq 0$, si ha poi $f_n(x)=0$ per ogni $n>(1/|x|)$. Di conseguenza, $\lim_{n\to+\infty} f_n(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$. Se esistesse una funzione sommabile g tale che per ogni $n\in\mathbb{N}$ $f_n(x)\leq g(x)$ q.o. in $\mathbb{R}$, grazie al Teorema di Lebesgue si dovrebbe avere

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x=0,$$

(dove si è osservato che $f_n(x) = 0 \ \ \forall(n \in \mathbb{N}, \ \ |x| > 1)$), mentre la disuguaglianza $|\sinh x| \geq |x|$, valida $\forall x \in \mathbb{R}$, implica che

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,\mathrm{d}x &= n\sqrt[n]{n}\int_{-1/n}^{1/n} |\sinh x|^{1/n}\,\mathrm{d}x \geq 2n\sqrt[n]{n}\int_0^{1/n} x^{1/n}\,\mathrm{d}x = \\ &= 2n\sqrt[n]{n}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\left(\frac{1}{n}\right)^{1+(1/n)} = \frac{2n}{n+1} \geq 1,\end{aligned}$$

assurdo. Quindi non esiste alcuna g sommabile che maggiori le funzioni della successione.

$\boxed{3}$ La funzione $|\sin x|$ è (in particolare) continua e pari, quindi la serie di Fourier associata è ben definita, di soli coseni ($b_n = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N}$), ed i coefficienti a_n sono dati da

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}[\cos x]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}\,;$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\cos x\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\,[\cos 2x]_0^{\pi} = 0;$$

per $n \geq 2$ si ha

$$\begin{aligned}a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\,\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\,\cos(n+1)x + \frac{1}{n-1}\,\cos(n-1)x\right]_0^{\pi} = \frac{1-(-1)^{n+1}}{\pi}\,\frac{2}{n^2-1}.\end{aligned}$$

Ne viene che, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \dfrac{4}{\pi(4n^2-1)}$, mentre $a_{2n-1} = 0$. Poiché $|\sin x|$ è anche regolare a tratti, quindi sviluppabile in serie di Fourier su tutto $\mathbb{R}$, si ha

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2-1}, \qquad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

In particolare, per $x = \frac{\pi}{2}$ si ottiene

$$1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1},$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2},$$

mentre, per $x = \frac{\pi}{4}$,

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{4n^2-1};$$

poiché $\cos\frac{n\pi}{2} = 0$ se n è dispari, mentre $\cos\frac{2n\pi}{2} = (-1)^n$, ne viene che

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{16n^2-1} = \frac{\pi}{8}\sqrt{2} - \frac{1}{2}.$$

$\boxed{\textbf{Prova scritta del 21 Febbraio 2007}}$

$\boxed{\mathbf{1}}$ *Data la forma differenziale ω_α, dipendente dal parametro $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\omega_\alpha := \frac{x}{1-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{y}{1-x^2-y^2} + \alpha x\right)\mathrm{d}y\,,$$

i) determinarne il dominio Ω_α, e stabilire per quali α la forma ω_α è chiusa in Ω_α;

ii) per gli α tali che ω_α è chiusa, determinare se è anche esatta in Ω_α; in questo caso, calcolarne le primitive;

iii) $\forall\alpha \in \mathbb{R}$, calcolare $\int_{\gamma_1} \omega_\alpha$ e $\int_{\gamma_2} \omega_\alpha$, dove:

γ_1 è la circonferenza di centro l'origine e raggio 2, percorsa una volta nel verso antiorario;

γ_2 è il perimetro del quadrato di vertici $(\mp 2, \mp 2)$, percorso una volta nel verso antiorario.

$\boxed{\mathbf{2}}$ *Data la serie di funzioni*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n x^3 \sin^n x \quad (x \in \mathbb{R})\,,$$

i) determinare l'insieme $A \subset \mathbb{R}$ di convergenza della serie; calcolare la somma della serie $\forall x \in A$;

ii) se in $B \subset A$ la serie converge uniformemente, si può concludere che B è limitato?

$\boxed{\mathbf{3}}$ *Si considerino i seguenti tre tipi di serie trigonometriche:*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin nx; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos nx; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Dire, motivando adeguatamente le risposte, se, comunque *si fissi uno dei tre tipi di serie, è possibile scegliere le successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ed il punto $x_0 \in \mathbb{R}$ in modo tale che*

i) la serie del tipo fissato converge in x_0, le altre due no;

oppure in modo che

ii) la serie del tipo fissato non converge in x_0, dove invece convergono le altre due.

Soluzione

$\boxed{\mathbf{1}}$ *i)* Per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$, si ha $\Omega_\alpha = \Omega = \Omega' \cup \Omega''$, dove

$$\Omega' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}, \qquad \Omega'' := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}\,.$$

Si verifica immediatamente che, in particolare, $\omega_\alpha \in C^1(\Omega)$, e che in Ω risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{x}{1-x^2-y^2} = \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2}\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{1-x^2-y^2} + \alpha x\right) = \frac{2xy}{(1-x^2-y^2)^2} + \alpha\,;$$

di conseguenza, ω_α è chiusa in Ω se e solo se $\alpha = 0$.

ii): ω_0 è certamente esatta in Ω', che è semplicemente connesso; non è detto invece che lo sia in Ω'', che non è semplicemente connesso. Vediamo allora se è possibile determinare una primitiva di ω_0 in Ω''. Cerchiamo cioè $f \in C^1(\Omega'')$ tale che, $\forall (x,y) \in \Omega''$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{x}{1-x^2-y^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{1-x^2-y^2}.$$

Dalla prima equazione si ricava che $f(x,y) = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-1) + g(y)$ in Ω''; dalla seconda equazione risulta però che $g'(y) = 0$, quindi g è *costante* in Ω''; ed è evidente che per ogni $c'' \in \mathbb{R}$ la funzione $\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-1) + c''$ è una primitiva di ω_0 in Ω''. Analogamente si procede per cercare le primitive in Ω'. In conclusione, ω_0 è esatta in Ω, e le sue primitive, che dipendono dai due parametri arbitrari $c', c'' \in \mathbb{R}$, sono date da

$$f_{c',c''}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2}\ln(1-x^2-y^2) + c' & \text{in } \Omega', \\ \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2-1) + c'' & \text{in } \Omega''. \end{cases}$$

iii): dato che $\omega_\alpha = \omega_0 + \alpha x\,\mathrm{d}y$ e ω_0 è esatta, si ha intanto che

$$\int_{\gamma_k} \omega_\alpha = \alpha \int_{\gamma_k} x\,\mathrm{d}y \qquad (k=1,2);$$

con l'usuale rappresentazione parametrica di γ_1 ($x(t) = 2\cos t,\ \ y(t) = 2\sin t,\ \ 0 \le t < 2\pi$),

$$\int_{\gamma_1} \omega_\alpha = \alpha \int_0^{2\pi} (2\cos t)\,(2\cos t)\,\mathrm{d}t = 4\alpha \int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 4\pi\alpha\,.$$

È poi evidente che

$$\int_{\gamma_2} \omega_\alpha = \alpha \int_{-2}^{2} 2\,\mathrm{d}t + \alpha \int_{-2}^{2} (-2)\,(-\mathrm{d}t) = 16\alpha\,.$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ *i*) Ricordando che per $|t| < 1$ si ha

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n t^{n-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{1-t} = \frac{1}{(1-t)^2}\,,$$

si vede subito che la serie data converge se e solo se $|\sin x| \neq 1$, quindi si ha

$$A = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}\,,$$

e in A la somma della serie è

$$x^3 \sin x \sum_{n=1}^{+\infty} n \sin^{n-1} x = \frac{x^3 \sin x}{(1-\sin x)^2}.$$

ii) No: basta osservare che, ad esempio, in $B := \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ tutti i termini della serie sono nulli.

$\boxed{\mathbf{3}}$ *i*) È possibile: ad esempio,

se $b_n = 0,\ a_n = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, la prima serie converge per ogni x_0, le altre due (che coincidono) non convergono per nessun x_0;

se $a_n = 0,\ b_n = 1\ \ \forall n \in \mathbb{N}$, e $x_0 \neq k\pi\ \ (k \in \mathbb{Z})$, prima e terza serie (che coincidono) non convergono, la seconda converge;

infine, se $a_n = b_n = 1$ quando $\frac{1}{4}(n+1) \in \mathbb{N}$, mentre $a_n = b_n = 0$ altrimenti, e $x_0 = \frac{1}{4}\pi$, le prime due serie non convergono, mentre la terza ha tutti i termini nulli.

ii) Non è possibile: dette $\{s'_n\}$, $\{s''_n\}$, $\{S_n\}$ le successioni delle ridotte delle tre serie, queste sono linearmente dipendenti ($s'_n + s''_n - S_n = 0$), quindi se due sono convergenti lo è anche la terza.

$\boxed{\text{Prova scritta del 18 Giugno 2007}}$

$\boxed{1}$ Determinare l'insieme I di convergenza della serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (1-|x|)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

$\boxed{2}$ Data la forma differenziale lineare

$$\omega := \frac{3x^2}{1-y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2\varphi(x)\,y}{(1-y^2)^2}\,\mathrm{d}y, \qquad (\varphi \in C^1(\mathbb{R})),$$

i) determinarne il dominio Ω;

ii) dire se esistono $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ tali che ω sia chiusa in Ω. In caso affermativo, determinarle; stabilire poi se per tali φ la forma ω è anche esatta in Ω, ed in questo caso calcolarne tutte le primitive.

$\boxed{3}$ Per ogni $\alpha > 0$, si indichi con f_α la funzione 2π-periodica su $\mathbb{R}$ che nell'intervallo $[-\pi,\pi)$ vale $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$; dire, motivando adeguatamente la risposta, per quali $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_\alpha(x) = s(f_\alpha; x)$.

Cosa si può dire quando $\alpha < 0$?

Soluzione

$\boxed{1}$ Posto $y := 1-|x|$, la serie data si scrive nella forma $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n\, y^n$, con $c_n := \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (serie di potenze nella variabile y). Ricordando che, per $t > 0$, si ha $t - \frac{1}{2}t^2 \le \log(1+t) \le t$, ne viene che

$$\frac{n(2n+1)}{2(n+1)^2} \le \frac{c_{n+1}}{c_n} \le \frac{2n^2}{(n+1)(2n-1)};$$

di conseguenza, $\lim_{n\to+\infty} |c_{n+1}/c_n| = 1$, e la serie di potenze in y ha raggio di convergenza 1. Inoltre, per $y = 1$ la serie *non converge*, perchè il suo termine generale è maggiore di $\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}$, termine generale di una serie a termini positivi *divergente*. Invece, per $y = -1$ la serie si scrive $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)$, ed è convergente grazie al criterio di Leibniz (la successione $\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ è *decrescente* ed *infinitesima*).

In conclusione, $x \in I$ se e solo se $-1 \le 1-|x| < 1$, quindi l'insieme I di convergenza della serie è

$$I = [-2,2] \setminus \{0\}.$$

$\boxed{2}$ *i)* Dominio di ω è l'insieme $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1-y^2 \ne 0\}$; quindi si ha $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$, dove

$$\Omega_1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -1\}; \quad \Omega_2 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 < y < 1\};$$
$$\Omega_3 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 1\}.$$

ii) Si ha $\omega \in C^\infty(\Omega)$; inoltre, in Ω risulta

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{3x^2}{1-y^2} = \frac{6x^2y}{(1-y^2)^2}; \qquad \frac{\partial}{\partial x}\frac{2\varphi(x)y}{(1-y^2)^2} = \frac{2\varphi'(x)y}{(1-y^2)^2},$$

quindi ω è chiusa in Ω_i se e solo se $\varphi'(x) = 3x^2$, cioè $\varphi(x) = x^3 + \frac{c_i}{2}$ $(c_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3)$, dunque se

$$\omega = \frac{3x^2}{1-y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{2x^3y + c_iy}{(1-y^2)^2}\,\mathrm{d}y \quad \text{in } \Omega_i.$$

Ogni (eventuale) primitiva in Ω della forma differenziale ora scritta deve quindi essere una funzione $f \in C^1(\Omega)$ tale che

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2}{1-y^2}; \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y + c_ix}{(1-y^2)^2} \qquad \text{in } \Omega_i,\ (i = 1,2,3).$$

Dalla prima equazione si ricava che in Ω_i deve essere $f(x,y) = \frac{x^3}{1-y^2} + \alpha_i(y)$ con $\alpha_i \in C^1(\mathbb{R})$; per la seconda, si deve avere

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{2x^3y}{(1-y^2)^2} + \alpha'(y) = \frac{2x^3y + c_iy}{(1-y^2)^2},$$

cioè $\alpha'(y) = \frac{c_iy}{(1-y^2)^2}$, dunque $\alpha_i(y) = \frac{c_i}{2(1-y^2)} + d_i$ $(d_i \in \mathbb{R},\ i = 1,2,3)$. Di conseguenza, ω è esatta in Ω, e le sue primitive sono date da

$$f(x,y) = \frac{x^3}{1-y^2} + \frac{c_i}{2(1-y^2)} + d_i \quad \text{in } \Omega_i,\ (i = 1,2,3),$$

dove $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ sono costanti reali arbitrarie.

$\boxed{\mathbf{3}}$ Se $\alpha \geq 1$, la funzione f_α è continua e regolare a tratti su tutto $\mathbb{R}$ (presenta solo punti angolosi: per $x = k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ quando $\alpha = 1$, per $x = (2k+1)\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$ per $\alpha > 1$), quindi è sviluppabile in serie di Fourier per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Quando $0 < \alpha < 1$, f_α è ancora *continua* in $\mathbb{R}$, ma *non regolare a tratti*: per $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, i rapporti incrementali sinistro e destro tendono rispettivamente a $-\infty$ ed a $+\infty$. Tuttavia, $f_\alpha(x)$ è certamente sviluppabile in serie di Fourier in tutti i punti $x_0 \neq 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$: in tali punti, esistono infatti *finite* le derivate sinistra e destra, e ciò implica che è verificata la condizione generalizzata del Dini con $S_0 = f(x_0)$. Basta allora esaminare la sviluppabilità in serie di Fourier di $f_\alpha(x_0)$ per $x_0 = 0$; ma anche in questo caso la condizione del Dini è verificata (con $S_0 = f_\alpha(0) = 0$), dato che, per ogni $\delta \in (0,\pi)$,

$$\int_0^\delta \frac{|f_\alpha(y) + f_\alpha(-y)|}{y}\,\mathrm{d}y = 2\int_0^\delta y^{\alpha-1}\,\mathrm{d}y = 2\frac{\delta^\alpha}{\alpha} < +\infty.$$

In conclusione, per *ogni* $\alpha > 0$ la funzione f_α è sviluppabile in serie di Fourier su *tutto* $\mathbb{R}$.

Per $\alpha < 0$, la funzione *non è definita* per $x = 2k\pi,\ \ k \in \mathbb{Z}$; poniamo allora $f_\alpha(2k\pi) := d$, dove d è un qualunque numero reale fissato.

Comunque si sia scelto d, quando $\alpha \leq -1$, la funzione f_α *non è integrabile* secondo Lebesgue su $(-\pi,\pi)$, quindi non si può parlare di serie di Fourier di f_α. Infine, per $-1 < \alpha < 0$, con lo stesso ragionamento svolto più sopra si conclude che $f_\alpha(x)$ è sviluppabile in serie di Fourier $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Si osservi che per $\alpha = 0$ l'unica scelta che rende $f_0(x)$ sviluppabile in serie di Fourier $\forall x \in \mathbb{R}$ è $d = 1$, cioè quando f_0 è *costante* su $\mathbb{R}$.