Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 21 gennaio 2008

Esercizio 1. Trovare l'insieme di convergenza $I \subseteq \mathbb{R}$ della seguente serie di funzioni

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+|x|^n} \arctan\left(n^{2x}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare poi eventuali sottoinsiemi di I su cui la serie converge uniformente, giustificando le risposte date.

Esercizio 2. Si considerino le forme differenziali

$$\omega_1 := \frac{x}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}\,dx + \frac{y-2}{\sqrt{x^2+(y-2)^2}}\,dy,$$
$$\omega_2 := \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\,dx + \frac{y}{(x-1)^2+y^2}\,dy.$$

a) Determinare i domini Ω_1 e Ω_2 delle due forme e stabilire se esse sono chiuse nei rispettivi domini.

b) Calcolare gli integrali curvilinei

$$\int_\gamma \omega_1 \quad \text{e} \quad \int_\gamma \omega_2$$

dove γ è la curva chiusa definita dall'equazione $x^2+4y^2=4$ percorsa una sola volta in senso antiorario.

Esercizio 3. Per $n \in \mathbb{N}$ si considerino le funzioni

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{(1+x^2)^{n+1}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare (se esiste) $k \in \mathbb{N}$ tale che per $n \geq k$ la funzione f_n sia integrabile in $\mathbb{R}$.

b) Studiare il

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx.$$

Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 25 febbraio 2008

Esercizio 1. Discutere convergenza puntuale ed uniforme della successione di funzioni

$$f_n(x) = (\max\{-|x|, |x| - 4\})^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

trovare cioè l'insieme $I \subseteq \mathbb{R}$ di convergenza puntuale e determinare eventuali sottoinsiemi di I su cui la successione converge uniformemente, giustificando le risposte date.

Esercizio 2. Calcolare il seguente integrale

$$\int_\gamma (3x^2y - \sin x)dx + \big(x^3 + \log y\big)dy$$

dove γ è la spezzata che unisce i punti $(0,1),\ (-1,2),\ (1,\pi),\ (\pi,1)$ nell'ordine.

Esercizio 3. Siano $f_n \in C^0([0,1])$ funzioni tali che

$$f_n(0) = f_n(1) = 0, \qquad 0 \le e^{f_n(x)} \le 1 + x^2 \quad \forall\, x \in [0,1]$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$, e inoltre

$$f_n \to 0 \quad \text{puntualmente in } [0,1] \text{ per } n \to \infty.$$

Si chiede se in queste condizioni possiamo concludere che

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f_n(x)dx = 0.$$

Fornire una dimostrazione o esibire un controesempio.

Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 1 luglio 2008

Esercizio 1. Data la serie di potenze

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{x^{3n}}{(2n)!}$$

dare tre esempi di successioni numeriche $\{b_n\}$ tali che, rispettivamente,

a) la serie di potenze abbia raggio di convergenza 0;

b) la serie di potenze converga nel punto $x = -2$ ma non converga per $x = 4$;

c) la serie di potenze converga in tutti i punti $x \in \mathbb{N}$.

Esercizio 2. In tutto questo esercizio sia $\{f_n\}$ una successione di funzioni tale che

$$\begin{cases} f_n \to 0 \ \text{ q.o. in } \mathbb{R} \text{ rispetto alla misura unidimensionale di Lebesgue,} \\ \text{per ogni } \ n \in \mathbb{N} \quad f_n \text{ è integrabile in } \mathbb{R} \ \text{ e } \ 0 \leq f_n(x) \leq 1 \ \text{ per q.o. } \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{C}$$

a) Si controlli se la successione $f_n(x) = |\sin(x/n)|$, $x \in \mathbb{R}$, verifica le condizioni (C);

b) indicata con χ_A la funzione caratteristica di un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}$, si controlli se la successione $f_n(x) = (1+|x|)^{-1}\chi_{[n,n+2]}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, verifica (C) e inoltre si calcoli $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$;

c) fornire un esempio di successione $\{f_n\}$ che verifichi sia (C) che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 3$;

d) notato che in generale con le sole condizioni (C) non vale il passaggio al limite sotto il segno di integrale, proporre ulteriori condizioni sulla successione $\{f_n\}$ che garantiscano che $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx = 0$.

Esercizio 3. Sviluppare in serie di Fourier la funzione g definita da

$$g(x) = \begin{cases} \pi & \text{se } \ 0 < x \leq \pi \\ x - 2\pi & \text{se } \ \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

e $2\pi-$periodica rispetto al sistema ortonormale completo

$$\{(2\pi)^{-1/2},\ \pi^{-1/2}\sin(nx),\ \pi^{-1/2}\cos(nx)\}.$$

Discutere poi la convergenza puntuale della serie di Fourier nell'intervallo $[-\pi, \pi]$.

Complementi di Analisi Matematica di Base

Prova scritta 10 settembre 2008

Esercizio 1. Si consideri la forma differenziale

$$\omega := \left(\frac{1}{x} + \frac{2-2x}{(x^2+y^4-2x-2y^2+2)^2}\right) dx + \frac{4(y-y^3)}{(x^2+y^4-2x-2y^2+2)^2}\, dy.$$

a) Determinare il dominio Ω della forma.

b) Stabilire se la forma è esatta in Ω.

Esercizio 2. Studiare la convergenza quasi ovunque della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \arctan n}$$

nell'intervallo $[-1, 1]$. Valutare poi la misurabilità e l'integrabilità della funzione somma della serie in $[-1, 1]$ o, eventualmente, in sotto-intervalli.

Esercizio 3. Trovare l'insieme di convergenza $I \subseteq \mathbb{R}$ della successione di funzioni

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{n^3} \frac{|\cos x|^k}{k \arctan k^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Determinare poi eventuali sottoinsiemi di I in cui la successione converge uniformemente, giustificando le risposte date.