Corso di Introduzione alla Topologia Algebrica - a.a. 2006-2007

Prova scritta del 31.1.2007

1. Sia B un bouquet di 3 cerchi C_1, C_2, C_3, uniti in un punto p. Per $i = 1, 2, 3$, sia γ_i un cammino in C_i con estremi in p la cui classe generi il gruppo fondamentale di C_i. I cammini

$$\sigma_1 = \gamma_2 * \gamma_3\,, \quad \sigma_2 = \gamma_1 * \gamma_3\,, \quad \sigma_3 = \gamma_1 * \gamma_2$$

inducono applicazioni continue $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \colon S^1 \to B$. Siano D_1, D_2, D_3 tre copie del disco D^2. Poniamo

$$X = B \sqcup_{\rho_1} D_1 \sqcup_{\rho_2} D_2 \sqcup_{\rho_3} D_3\,.$$

   (a) Calcolare i gruppi di omologia intera e il gruppo fondamentale di X.

   (b) Stessa domanda per

$$Y = B \sqcup_{\rho_1} D_1 \sqcup_{\rho_2} D_2 \sqcup_{\tau} D_3\,,$$

   dove τ è indotta da $\gamma_1 * \overline{\gamma_2}$.

2. (a) Costruire un CW-complesso di dimensione 2 il cui gruppo fondamentale sia isomorfo al gruppo simmetrico S_3.

   (b) È possibile trovare una superficie compatta che abbia lo stesso tipo di omotopia del CW-complesso del punto (a)?

   (c) Costruire una varietà topologica di dimensione 3 il cui gruppo fondamentale sia isomorfo a S_3.

Soluzioni

1. (a) Indichiamo con $C_q(X)$ il gruppo delle q-catene cellulari di X. È chiaro che $C_0(X)$ è generato da p, $C_1(X)$ dai γ_i, e $C_2(X)$ dai D_i. Mentre i γ_i sono cicli, si ha che

$$\partial D_1 = \gamma_2 + \gamma_3\,, \quad \partial D_2 = \gamma_1 + \gamma_3\,, \quad \partial D_3 = \gamma_1 + \gamma_2$$

Sottraendo la prime di queste relazioni dalla seconda, si ottiene che $\gamma_1 \sim \gamma_2$, dove $\sim$ sta per omologia. Analogamente, $\gamma_1 \sim \gamma_3$. Sommando le ultime due relazioni e sottraendo la prima dal risultato si ottiene invece che $2\gamma_1 \sim 0$. D'altra parte la matrice dell'applicazione $\partial \colon C_2(X) \to C_1(X)$ rispetto ai generatori scelti è

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

che ha determinante pari a 2. Quindi δ è iniettiva e ha come immagine un sottogruppo di $C_2(X)$ di indice 2. Dunque $H_2(X) = 0$, mentre $H_1(X) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ è generato dalla classe di γ_1.

Il gruppo fondamentale si calcola in modo analogo. Le relazioni

$$\gamma_2 * \gamma_3 \sim \varepsilon\,, \quad \gamma_1 * \gamma_3 \sim \varepsilon\,, \quad \gamma_1 * \gamma_2 \sim \varepsilon$$

dove $\sim$ indica omotopia con estremi fissi e ε il cammino costante, implicano facilmente che $\gamma_1 \sim \gamma_2 \sim \gamma_3$, e che $\gamma_1 * \gamma_1 \sim \varepsilon$. Ne segue che anche $\pi_1(X, p)$ è ciclico di ordine 2, generato dalla classe di γ_1.

(b) Le modifiche da apportare ai calcoli precedenti sono le seguenti. L'operatore ∂ è dato da

$$\partial D_1 = \gamma_2 + \gamma_3\,, \quad \partial D_2 = \gamma_1 + \gamma_3\,, \quad \partial D_3 = \gamma_1 - \gamma_2$$

e la sua matrice è quindi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

che ha rango 2. Il nucleo di ∂ è generato da $D_1 - D_2 + D_3$ e l'immagine da $\gamma_2 + \gamma_3$ e $\gamma_1 + \gamma_3$. Ne segue che $H_2(Y) \cong \mathbb{Z}$ e che $H_1(Y) \cong \mathbb{Z}$ è generato dalla classe di γ_1. In omotopia invece, ragionando come al punto (a), si ottiene che $\pi_1(Y, p)$ è ciclico infinito e generato dalla classe di γ_1.

2. (a) Indichiamo con X il seguente CW-complesso. Lo 0-scheletro di X consta di un solo punto p, l'1-scheletro contiene due 1-celle f e g, e il 2-scheletro tre 2-celle c_1, c_2, c_3. Queste ultime sono attaccate a X^1 come segue. Un cammino chiuso in X^1 con estremi in p può anche essere visto come una applicazione da $S^1 = \partial D^2$ in X^1 che manda un punto base su S^1, fissato una volta per tutte, in p; non faremo differenza tra questi due oggetti. Con questa convenzione, le mappe di attaccamento di c_1, c_2, c_3 sono, rispettivamente, $f * f * f$, $g * g$, e $f * g * f * \overline{g}$. Dunque il gruppo fondamentale di X è generato da $[f]$ e $[g]$, e le relazioni tra questi sono generate da $[f]^3 = 1$, $[g]^2 = 1$ e $[f][g][f][g]^{-1} = 1$. L'ultima relazione può essere riscritta sotto la forma più familiare $[f][g] = [g][f]^{-1}$. Quindi $\pi_1(X, p)$ è isomorfo a S_3.

   (b) No, perchè le sole superfici con gruppo fondamentale finito sono S^2 e il piano proiettivo reale, la prima semplicemente connessa, la seconda con gruppo fondamentale di ordine 2.

   (c) Poniamo $\vartheta = 2\pi/3$ e

$$M = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Chiaramente, $M^3 = I$. Definiamo anche matrici 4×4 a blocchi A e B ponendo

$$A = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M^2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}.$$

A e B sono matrici ortogonali, e si verifica immediatamente che

$$A^3 = I\,, \quad B^2 = I\,, \quad AB = BA^{-1}\,.$$

Quindi il sottogruppo G del gruppo ortogonale $O(4)$ generato da A e B è isomorfo al gruppo simmetrico S_3. Questo gruppo agisce su $\mathbb{R}^4$; poiché è un sottogruppo del gruppo ortogonale, l'azione si restringe a una azione su S^3. Le matrici A e B non hanno autovalori reali, e lo stesso vale quindi per gli altri elementi non banali di G, cioè A^2 e i coniugati di B. Quindi G agisce su S^3 senza punti fissi. Ne segue che $X = S^3/G$ è una varietà topologica e che $S^3 \to X$ è un rivestimento. Dato che S^3 è semplicemente connessa, il gruppo fondamentale di X si identifica a G.