Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 9

1. In $\mathbb{R}^4$ con il prodotto scalare euclideo trovare una base ortonormale per il piano V di equazioni

$$\begin{cases} 2x + y - z + w = 0 \\ x + y + z + 3w = 0 \end{cases}$$

e una base ortonormale per $V^\perp$. Trovare le proiezioni ortogonali su V e $V^\perp$ del vettore v di coordinate $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$ e $w = 4$.

2. Usando il procedimento di Gram-Schmidt, trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ (con il prodotto scalare euclideo) a partire dalla base:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. In ognuno dei seguenti casi dare una rappresentazione parametrica e con equazioni del piano o della retta Λ ortogonale al piano Π in $\mathbb{R}^n$ nel punto p; trovare inoltre le proiezioni ortogonali del punto q su Π e su Λ.

   (a) $n = 3$, $p = {}^t(1, 1, -1)$, $q = {}^t(1, -1, 1)$, Π dato dall'equazione:

   $$x + y - z = -3$$

   (b) $n = 4$, $p = {}^t(1, 0, 1, -1)$, $q = {}^t(1, -1, -1, 1)$, Π dato dalle equazioni:

   $$\begin{cases} x + 3y - z + w = -1 \\ 2x - y + 2z + w = 3 \end{cases}$$

   (c) $n = 3$, $p = {}^t(1, 1, 1)$, $q = {}^t(1, 2, 3)$, Π rappresentato in forma parametrica da

   $$(s, t) \mapsto \begin{pmatrix} s - t + 1 \\ 2s + t - 1 \\ s - 4t + 3 \end{pmatrix}$$

4. Diagonalizzare tramite trasformazioni ortogonali le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{6} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} & 0 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix}$$