Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 6

1. Siano $t, x_1, x_2, \dots, x_n$ scalari. Mostrare che le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & & \\ & & \cdots & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

e

$$B = \begin{pmatrix} 1 & x_1+t & x_1^2+x_1t+t^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{i} x_1^{i-j}t^j & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_1^{n-1-j}t^j \\ 1 & x_2+t & & \cdots & & \cdots & \\ & \cdots & & \cdots & & \cdots & \\ 1 & x_n+t & x_n^2+x_nt+t^2 & \cdots & \sum_{j=0}^{i} x_n^{i-j}t^j & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} x_n^{n-1-j}t^j \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso determinante. (Suggerimento: usare l'eliminazione Gaussiana per colonne.)

2. (Determinante di Vandermonde) Mostrare che il determinante della matrice A dell'esercizio precedente vale

$$\det(A) = \prod_{n \geq i > j \geq 1} (x_i - x_j)$$

(Suggerimento: ragionare per induzione su n usando l'esercizio precedente, l'eliminazione Gaussiana per righe e lo sviluppo di Laplace rispetto a una delle righe.)

3. Mostrare che la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 2n+1 & 2n+2 & \cdots & 3n \\ & \cdots & \cdots & \\ (n-1)n+1 & \cdots & & n^2 \end{pmatrix}$$

ha rango 2 per $n \geq 2$. Trovare una base per lo spazio delle colonne X tali che $AX = 0$.

4. Calcolare il determinante di ognuna delle seguenti matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -7 & -6 & -5 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

5. Sia M una matrice $n \times n$ a coefficienti interi. Mostrare che M ha una inversa a coefficienti interi se e solo se $\det(M) = \pm 1$.