Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011
Esercizi 3

1. In ognuno dei seguenti casi U e W sono sottospazi di uno spazio vettoriale V. Trovare la dimensione e determinare una base di $U \cap W$. Fare lo stesso per $U + W$. Ovunque scriviamo $\mathbf{x}$ per indicare

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

   (a) $V = \mathbb{R}^5$, $U = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 + x_3 = x_3 + x_4 + x_5 = 0\}$, $W = \{\mathbf{x} : x_1 + x_2 = x_4 + x_5 = 0\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^5$, $U = \{\mathbf{x} : x_1 - x_2 + 2x_3 = x_1 + 2x_3 + x_4 - x_5 = 0\}$, $W = \{\mathbf{x} : 2x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2x_1 - x_3 + 2x_5 = 0\}$

   (c) $V = \mathbb{R}^5$, U è il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   e W è il sottospazio generato da

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. Calcolare la matrice della applicazione lineare $f : V \to W$ rispetto a basi $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_n)$ per V e $\mathcal{W} = (w_1, \ldots, w_h)$ per W nei seguenti casi:

   (a) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}^2$

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y + z \\ 3x + y + 2z \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \text{base canonica di } V, \quad \mathcal{W} = \text{base canonica di } W$$

   (b) come (a) ma con

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   (c) come (a) ma con

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) come (a) ma con $\mathcal{V}$ come in (b) e $\mathcal{W}$ come in (c).

(e) $V = W =$ spazio dei polinomi reali di grado ≤ 3 nella variabile x,
$v_i = w_i =$ la funzione x^{i-1}
$f(P) =$ la derivata di P