Corso di Algebra lineare (e geometria) - a.a. 2010-2011

Esercizi 2

Sia K un campo. Invece che come righe, indicheremo gli elementi di K^n come colonne. Ad esempio, invece di $(2, 3, 1)$ scriveremo

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. In ognuno dei seguenti casi dire se $\mathcal{V}$ è un insieme indipendente. Inoltre, se $\mathcal{V}$ è dipendente, scrivere v_1 come combinazione lineare dei rimanenti elementi di $\mathcal{V}$.

   (a) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dove

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (b) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dove

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   (c) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3, v_4\} \subset \mathbb{R}^3$ dove

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

   (d) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dove

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   (e) $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$ dove

   $$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. In ognuno dei casi seguenti mostrare che $L \subset \mathbb{R}^n$ è un sottospazio vettoriale e trovarne una base

   (a) $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme degli

   $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

   tali che $4x - 2y + z = 0$.

(b) $L \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme degli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

tali che $x - y + z = 3x + y + z = 0$.

(c) $L \subset \mathbb{R}^4$ è l'insieme degli

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

tali che $x - y + z - t = 0$.